Mestrado Integrado em Engenharia Química
Ano lectivo de 2011/2012, 1^o semestre

Exame Normal de Física I
16 de Janeiro de 2012

1. Considere um objecto que desliza livremente e ao longo de uma linha recta sobre um piso horizontal que é áspero. Durante o movimento, a posição x (em metros) do objecto, em função do tempo t (em segundos), é dada por

$$x(t) = -7.5 + 7t - 0.7t^2 \quad (m) \tag{1}$$

a Determine a velocidade instantânea $v(t)$ e a desaceleração do objecto.

b Determine o coeficiente de atrito dinâmico (ou cinético) entre o objecto e o piso. Considere a aceleração gravítica igual a $g = 9.8$ m/s^2.

c Determine a posição x do objecto no instante $t = 6$ s.

2. Uma roda de raio R e massa m rola sem deslizar, ao longo de uma descida.
O momento de inércia da roda é dado por mR^2.
Considere a aceleração gravítica igual a $g = 9.8$ m/s^2.

Determine a velocidade com que a roda chega ao fim da descida sabendo que a diferença de altura entre o início e o fim da descida é igual a 5.0 metros.

3. As cordas de um violino estão fixas, num lado, pelas cravalhas, as peças de madeira, uma para cada uma das cordas, usadas para afinar o instrumento, e, no outro lado, pelo cavalete, a peça na qual se apoiam as quatro cordas distendidas. A distância entre estes pontos fixos das cordas é igual a 32.5 cm.
A velocidade v das ondas numa corda depende da tensão T da corda e da sua massa μ (em kg por metro) de acordo com a expressão:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{2}$$

Considere que as quatro cordas têm, cada uma, uma tensão de 70 N.

a Determine a frequência do primeiro harmónico de uma corda cuja massa por unidade de comprimento é igual a $\mu = 0.38$ g/m.

b Sabendo que as cordas são feitas de aço ($\rho = 7.7$ g/cm^3) qual o diâmetro da corda que produz um lá (440 Hz)?

4. Considere, num planeta qualquer, uma massa de 15.0 kg, pendurada por meio de um fio de peso desprezável com 5.00 m de comprimento, cujos movimentos são descritos pela seguinte função de t (t em segundos)

$$\alpha(t) = 5^o \sin(1.6t) \tag{3}$$

a Determine a aceleração gravítica g do planeta.

b Determine a frequência f das oscilações verticais a que a massa fica sujeita, se neste planeta ela for pendurada numa mola ideal com uma constante de elasticidade igual a 592.2 N/m.

5. Para objectos esféricos de massa m e raio r, que se movem com uma velocidade v dentro de um meio viscoso, consideremos a força de resistência F_{res} representada por

$$F_{\text{res}} = C_1 r v \tag{4}$$

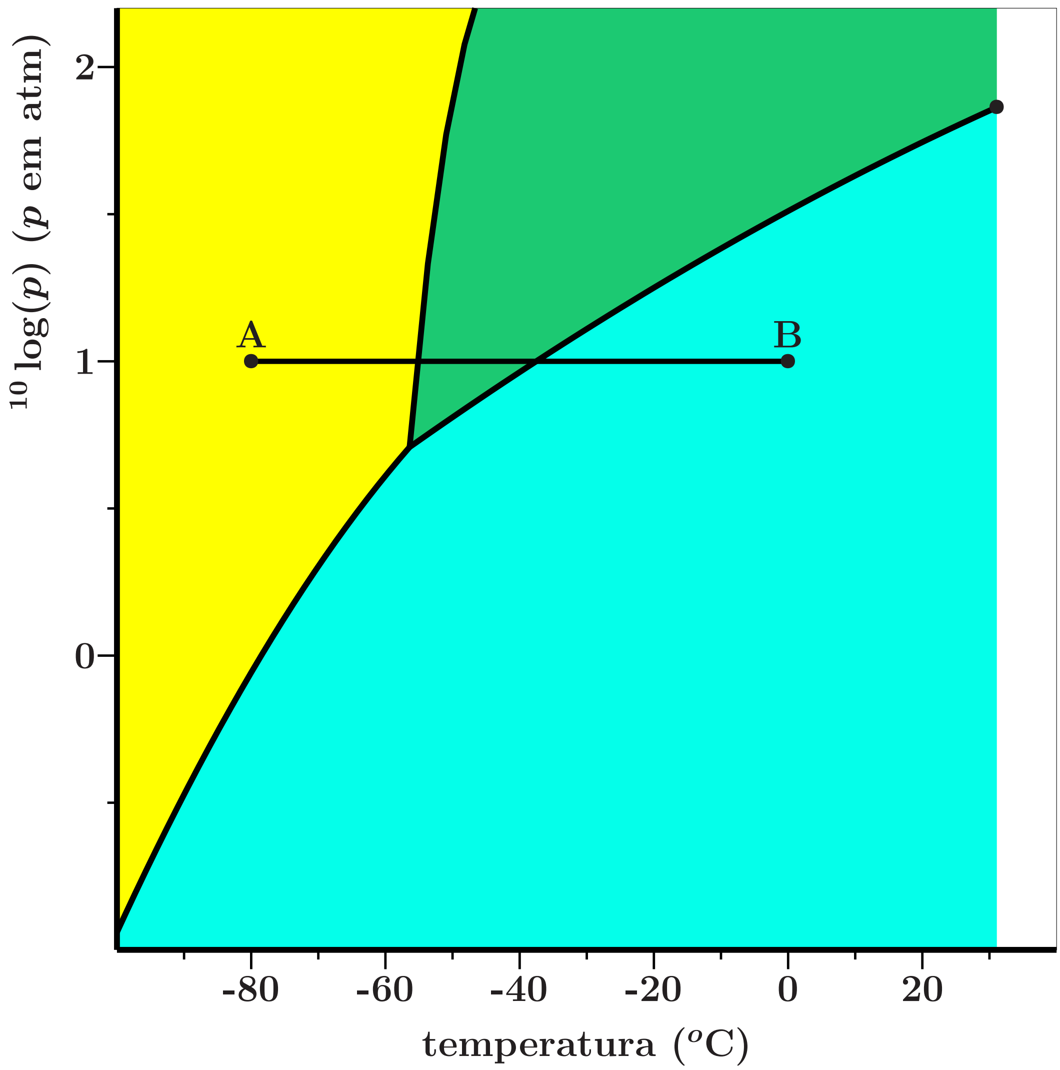
se o movimento se encaixa no regime I, ou por

$$F_{\text{res}} = \pm C_2 r^2 v^2 \tag{5}$$

se o movimento se encaixa no regime II.
Numa experiência medem-se as velocidades terminais de esferas sólidas de metal que caem livremente para dentro de um meio viscoso A. A experiência é posteriormente repetida usando um outro meio viscoso B.
As esferas vêm em quatro variedades diferentes, que se distinguem pelos seus diâmetros. A tabela a seguir mostra os resultados.

	v_{term} (m/s)	
diâmetro (mm)	subst. A	subst. B
3.00	0.775	0.00585
4.00	0.894	0.01040
5.00	1.000	0.01625
6.00	1.095	0.02340

Considere a densidade do metal das esferas igual a 8.02 g/cm^3 e a aceleração gravítica $g = 9.8$ m/s^2. As duas substâncias A e B têm ambas densidades iguais a 0.90 g/cm^3. Determine o regime que se aplica em cada uma das experiências e as respectivas constantes C_1 ou C_2.



6.

A figura mostra uma parte do diagrama de fase de CO_2 (gelo seco ou neve carbónica). No eixo horizontal está indicada a temperatura em graus Celsius e no eixo vertical o logaritmo na base dez da pressão p (p em atmosferas).
Uma quantidade de 10 gramas de gelo seco é aquecida passando de um estado indicado por A no diagrama de fase até ao estado indicado por B.

a Determine, a partir da figura, as temperaturas dos estados A e B e também as temperaturas às quais a substância sofre uma transição de fase.

b O calor específico do dióxido de carbono é igual a $c_P = 800$ J/(kg K) no estado gasoso, a 1880 J/(kg K) no estado líquido e a 1400 J/(kg K) no estado sólido. O calor latente de fusão do dióxido de carbono é igual a 350 kJ/kg e o de vaporização a 600 kJ/kg. Determine a quantidade de calor que é preciso para o processo $A \to B$.

c Determine a pressão e a temperatura de um contentor que contém pedaços de gelo seco, uma quantidade de dióxido de carbono líquido e que tem o restante volume preenchido com dióxido de carbono no estado gasoso.

Solutions

Exercício 1

a:

$$v(t) = \frac{x(t)}{dt} = 7 - 1.4t \text{ (m/s)} \quad \text{and} \quad a = \frac{v(t)}{dt} = -1.4 \text{ (m/s}^2\text{)} \tag{6}$$

b:

friction force = dynamic friction coefficient × reaction force = dynamic friction coefficient × weight

Consequently,

$$\text{dynamic friction coefficient} = \frac{\text{friction force}}{\text{weight}} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} = \frac{1.4 \text{ m/s}^2}{9.8 \text{ m/s}^2} = 0.143$$

c: From alinea (**a**) we learn that at $t = 5$ s the object has zero velocity. Hence, after 5 seconds it remains were it is stopped: $x(t = 6 \text{ s}) = x(t = 5 \text{ s}) = 10$ m.

Exercício 2

After rolling downhill a distance such that the height of the wheel has changed by h and its velocity by v, its gain in kinetic energy is related to its loss in gravitational potential energy by

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}} = mgh$$

The relation between ω and v is given by

$$v = \omega R \quad \Longleftrightarrow \quad I\omega^2 = mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 = mv^2$$

So we have the relation

$$mv^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh \quad \Longleftrightarrow \quad v^2 = gh = (9.8 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ m}) = 49 \text{ (m/s)}^2$$

Consequently

$$v = 7.0 \text{ m/s}$$

Exercício 3

a: The velocity of waves follows from

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{70 \text{ N}}{0.38 \times 10^{-3} \text{ kg/m}}} = 429.2 \text{ m/s} \tag{7}$$

The frequency of the first harmonic is given by

$$f = \frac{v}{2\ell} = \frac{429.2 \text{ m/s}}{0.65 \text{ m}} = 660 \text{ /s} = 660 \text{ Hz} \tag{8}$$

b: From Eqs. (7) and (8), we learn

$$f^2 = \left(\frac{v}{2\ell}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{2\ell}\right)^2 = \frac{T/\mu}{4\ell^2} = \frac{T}{4\mu\ell^2}$$

Hence,

$$\mu = \frac{T}{4f^2\ell^2} \tag{9}$$

Moreover, the mass m of a violin string of length ℓ and volume $V = \ell \times (\text{cross section})$, is given by

$$m = V\rho$$

but, also by

$$m = \ell\mu \quad .$$

So, we have

$$\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{V\rho}{\ell} = \frac{\ell \times \text{cross section} \times \rho}{\ell} = \text{cross section} \times \rho \quad .$$

Furthermore, with d representing the diameter of the string, one has

$$\text{cross section} = \frac{1}{4}\pi d^2 \quad .$$

Hence, also using Eq. (9),

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\frac{\text{cross section}}{\frac{1}{4}\pi}} = \sqrt{\frac{\text{cross section} \times \rho}{\frac{1}{4}\pi\rho}} = \sqrt{\frac{\mu}{\frac{1}{4}\pi\rho}} = \sqrt{\frac{\frac{T}{4f^2\ell^2}}{\frac{1}{4}\pi\rho}} = \sqrt{\frac{T}{\pi f^2\ell^2\rho}} \\ &= \sqrt{\frac{70 \text{ N}}{\pi\,(440 \text{ Hz})^2\,(0.325 \text{ m})^2\left(7.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3\right)}} = 0.000376\sqrt{\frac{\text{N}}{\text{Hz}^2\text{m}^2\text{kg/m}^3}} \\ &= 0.000376 \text{ m} = 0.376 \text{ mm} \end{aligned}$$

Exercício 4

a: From $\alpha(t) = 5^o \sin(1.6t)$ we learn that the angular frequency is given by $\omega = 1.6/\text{s}$. Moreover, we know that $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Hence,

$$g = \ell\omega^2 = (5.00 \text{ m})(1.6 \text{ /s})^2 = 12.8 \text{ m/s}^2$$

b: We also have learned that for the mass-spring system the angular frequency is given by $\omega = \sqrt{C_{\text{el}}/m}$ and, moreover, that the frequency is given by $2\pi f = \omega$. Consequently, we find

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C_{\text{el}}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{592.2 \text{ N/m}}{15 \text{ kg}}} = 1.00 \text{ Hz}$$

Exercício 5

First we want to know the regime of the motion. Therefor we have the relations

$$v_{\text{term}} \propto d^2 \ \ \text{(regime I)} \quad \text{or} \quad v_{\text{term}} \propto \sqrt{d} \ \ \text{(regime II)} \tag{10}$$

We determine

	substance A			substance B		
diameter d (mm)	v_{term} (m/s)	I v_{term}/d^2 (m/s/$\sqrt{\text{mm}}$)	II $v_{\text{term}}/\sqrt{d}$ (m/s/mm^2)	v_{term} (m/s)	I v_{term}/d^2 (m/s/$\sqrt{\text{mm}}$)	II $v_{\text{term}}/\sqrt{d}$ (m/s/mm^2)
3.00	0.775	0.0861	0.4472	0.00585	0.00065	0.00338
4.00	0.894	0.0559	0.4472	0.01040	0.00065	0.00520
5.00	1.000	0.0400	0.4472	0.01625	0.00065	0.00727
6.00	1.095	0.0304	0.4472	0.02340	0.00065	0.00955

So, clearly, the motion in substance A is in regime II, whereas the motion in substance B is in regime I.

Next we must determine the constants C_2 for the motion in substance A and C_1 for the motion in substance B. Thereto, we write

$$\begin{aligned}
ma &= \text{total force on the sphere} \\
&= \text{weight} + \text{Archimedes force} + F_{\text{res}} \\
&= -mg + V_{\text{sphere}}\rho_{\text{substance}}g + F_{\text{res}} \\
&= -V_{\text{sphere}}\rho_{\text{metal}}g + V_{\text{sphere}}\rho_{\text{substance}}g + F_{\text{res}} \\
&= -V_{\text{sphere}}\left(\rho_{\text{metal}} - \rho_{\text{substance}}\right)\ g + F_{\text{res}}
\end{aligned}$$

When the terminal velocity is reached, *i.e.* $v = v_{\text{term}}$, one has no more acelleration, hence $a = 0$.

Consequently,

$$\begin{aligned}
F_{\text{res}} &= V_{\text{sphere}}\left(\rho_{\text{metal}} - \rho_{\text{substance}}\right)\ g \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3\left(\rho_{\text{metal}} - \rho_{\text{substance}}\right)\ g \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3\left\{\left(8.02\times10^3\ \text{kg/m}^3\right) - \left(0.90\times10^3\ \text{kg/m}^3\right)\right\}\ \left(9.8\ \text{m/s}^2\right) \\
&= \left(73.07\times10^3\ \text{kg/(ms)}^2\right) 4r^3
\end{aligned}$$

In regime I we have

$$C_1 v_{\text{term}} r = \left(73.07 \times 10^3 \text{ kg/(ms)}^2\right) 4r^3$$

Hence, for substance B (we take the sphere with $d = 3$ mm)

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\left(73.07 \times 10^3 \text{ kg/(ms)}^2\right) 4r^2}{v_{\text{term}}} = \frac{\left(73.07 \times 10^3 \text{ kg/(ms)}^2\right) d^2}{v_{\text{term}}} \\ &= \frac{\left(73.07 \times 10^3 \text{ kg/(ms)}^2\right) (3.00 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{5.85 \times 10^{-3} \text{ m/s}} = 112 \text{ kg/(ms)} \end{aligned}$$

In regime II we have

$$C_2 v_{\text{term}}^2 r^2 = \left(73.07 \times 10^3 \text{ kg/(ms)}^2\right) 4r^3$$

Hence, for substance A (we take the sphere with $d = 3$ mm)

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\left(73.07 \times 10^3 \text{ kg/(ms)}^2\right) 4r}{v_{\text{term}}^2} = \frac{\left(73.07 \times 10^3 \text{ kg/(ms)}^2\right) 2d}{v_{\text{term}}^2} \\ &= \frac{\left(73.07 \times 10^3 \text{ kg/(ms)}^2\right) (2 \times 3.00 \times 10^{-3} \text{ m})}{(0.775 \text{ m/s})^2} = 731 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Exercício 6

a: $T_A = -80^o$C, $T_B = 0^o$C, $T_{\text{solid}\rightarrow\text{liquid}} \approx -56^o$C and $T_{\text{liquid}\rightarrow\text{gas}} \approx -38^o$C.

b:

$$\begin{aligned} \text{calor} &= \text{heating solid} + \text{fusion} + \text{heating liquid} + \text{evaporation} + \text{heating gas} \\ &= m\,\Delta T\, c_{\text{solid}} + m\, c_{\text{fusion}} + m\,\Delta T\, c_{\text{liquid}} + m\, c_{\text{evaporation}} + m\,\Delta T\, c_{\text{gas under constant pressure}} \\ &= m\, \Big\{ (-56 + 80)\,\text{K}\,(1400 \text{ J/(kg K)}) + \left(350 \times 10^3 \text{ J/kg}\right) \\ &\quad + (-38 + 56)\,\text{K}\,(1880 \text{ J/(kg K)}) + \left(600 \times 10^3 \text{ J/kg}\right) + (0 + 38)\,\text{K}\,(800 \text{ J/(kg K)}) \Big\} \\ &= m\, \left(1.05 \times 10^6 \text{ J/kg}\right) = \left(10 \times 10^{-3} \text{ kg}\right) \left(1.05 \times 10^6 \text{ J/kg}\right) = 1.05 \times 10^4 \text{ J} \end{aligned}$$

c: The triple point has pressure ${}^{10}\log(p) \approx 0.7$, which gives $p \approx 10^{0.7} = 5.0$ atm, and temperature $T \approx -56^o$C.