FÍSICA GERAL I

Exame de recurso, Quinta-feira, 8 de Fevereiro de 2001

Tome os seguintes valores:

constantes e outros dados			
velocidade da luz	c	$3{,}00\times10^{8}$	m/s
velocidade do som		344	m/s
electrão-Volt	eV	$1{,}60\times10^{-19}$	Nm
massa ρ (m_ρ)	$770 MeV/c^2$	$1{,}37\times10^{-27}$	kg
massa π (m_π)	$140 MeV/c^2$	$0{,}25\times10^{-27}$	kg
constante de gravitação	G	$6{,}673\times10^{-11}$	Nm^2/kg^2
aceleração gravítica	$g = G\frac{M_{\text{Terra}}}{R^2_{\text{Terra}}}$	9,81	m/s^2
raio médio da Terra	R_{Terra}	$6{,}378\times10^{6}$	m
massa da Terra	M_{Terra}	$5{,}98\times10^{24}$	kg
distância média Sol-Terra	a.u.	$1{,}50\times10^{11}$	m
raio médio da Lua	R_{Lua}	$1{,}74\times10^{6}$	m
distância média Lua-Terra		$3{,}84\times10^{8}$	m

1. Um objecto de $80g$ desloca-se ao longo do eixo dos XX sob a acção de uma força $F(x) = -2x$ (x em metros, F em Newtons).
Determine:

a a função de Lagrange para este sistema.

b a função posição, $x(t)$, do objecto em função do tempo, t, para o caso em que no instante $t = 0$ o objecto passe pela origem do eixo dos XX com uma velocidade de $10m/s$.

Solução:

a Tomando $U(x) = x^2$, verificamos que $F(x) = -dU(x)/dx$, ou seja que a força F deriva de $U(x)$, ou seja é igual a menos a derivada de $U(x)$ em ordem a x, representando portanto $U(x)$ a energia potencial do objecto. A energia cinêtica do objecto é dada por $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. Portanto, para a função de Lagrange do sistema obtemos

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) \;=\; T - U \;=\; \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - x^2 \;=\; 0,040 \times \dot{x}^2 - x^2 \quad .$$

b As equações de movimento podem ser determinadas através das equações de Euler-Lagrange:

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -2x \quad .$$

Solução geral: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, com $\omega^2 = \frac{2}{m} = \frac{2}{0,080} = 25$. Portanto $\omega = 5rad/s$.

Depois temos as seguintes condições fronteiras:

$$0 \;=\; x(0) \;=\; A\cos(\phi) \iff \phi = \pm\frac{\pi}{2} \quad ,$$

$$\text{e} \quad 10m/s \;=\; \dot{x}(0) \;=\; -A\omega\sin(\phi) \iff \phi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad A\omega = 10m/s \quad ,$$

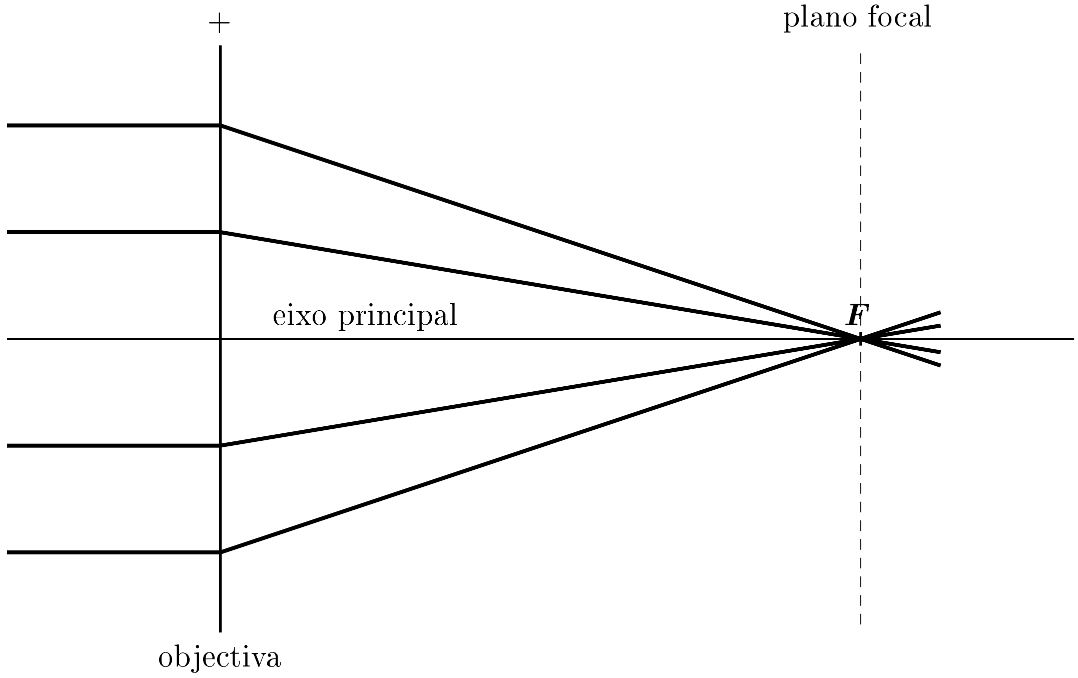
Portanto $A = 2m$.
A função posição procurada é então dada por $x(t) = 2\cos\left(5t - \frac{1}{2}\pi\right) = 2\sin(5t)$.

2. Considere um telescópio formado por duas lentes delgadas (positivas), uma objectiva com uma distância focal de $40cm$ e uma ocular com uma distância focal de $5cm$. Os eixos principais das duas lentes coincidem. A distância entre as lentes é de $45cm$.
Os raios de luz provenientes de uma estrela incidem na objectiva paralelos ao eixo principal e os raios de luz de uma outra estrela fazem um ângulo de $2°$ com o eixo principal.
Faça um esquema da passagem dos raios de luz no telescópio e determine o ângulo entre eles à saída da ocular.

Solução:

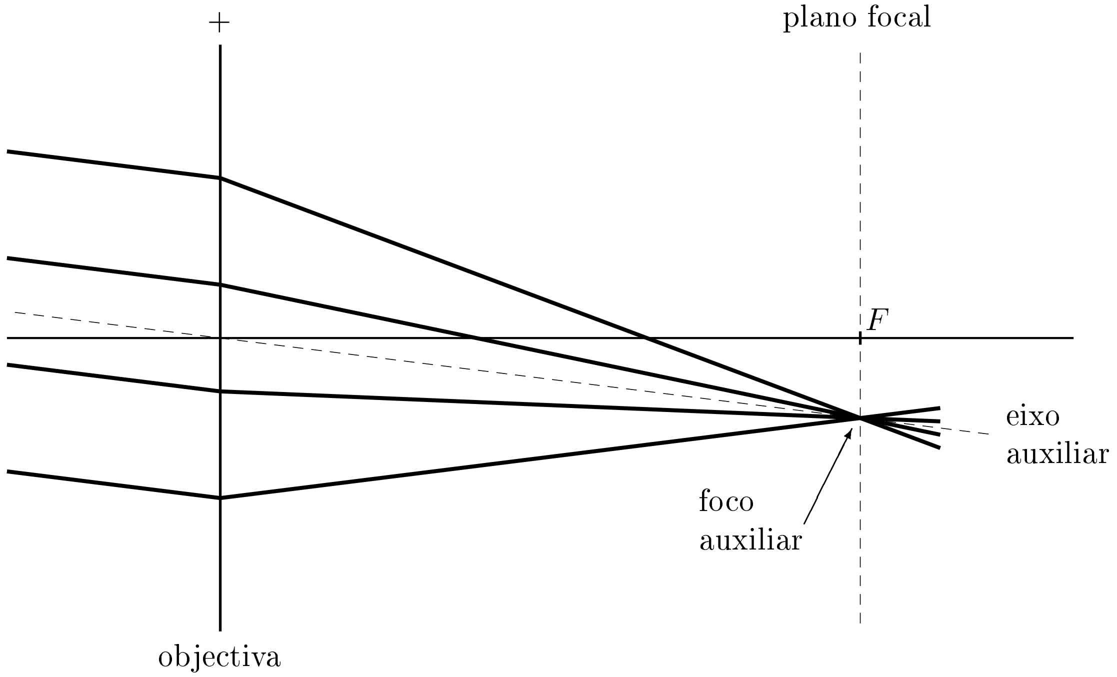
Para começar, considere a passagem dos raios na objectiva. Uma lente positiva desvia na direcção de um foco auxiliar, ou do foco principal, um raio que incide na lente numa direcção paralela ao respectivo eixo auxiliar/principal.

Primeiro consideramos os raios provenientes da estrela que está na direcção do eixo principal do telescópio. A construção da continuação dos raios de luz incidentes na objectiva, está representada na figura seguinte



Observa-se que o desvio dos raios é tal, que eles convergem no foco principal F da objectiva depois de terem passado a objectiva. A este ponto chama-se *imagem real* da estrela em causa.

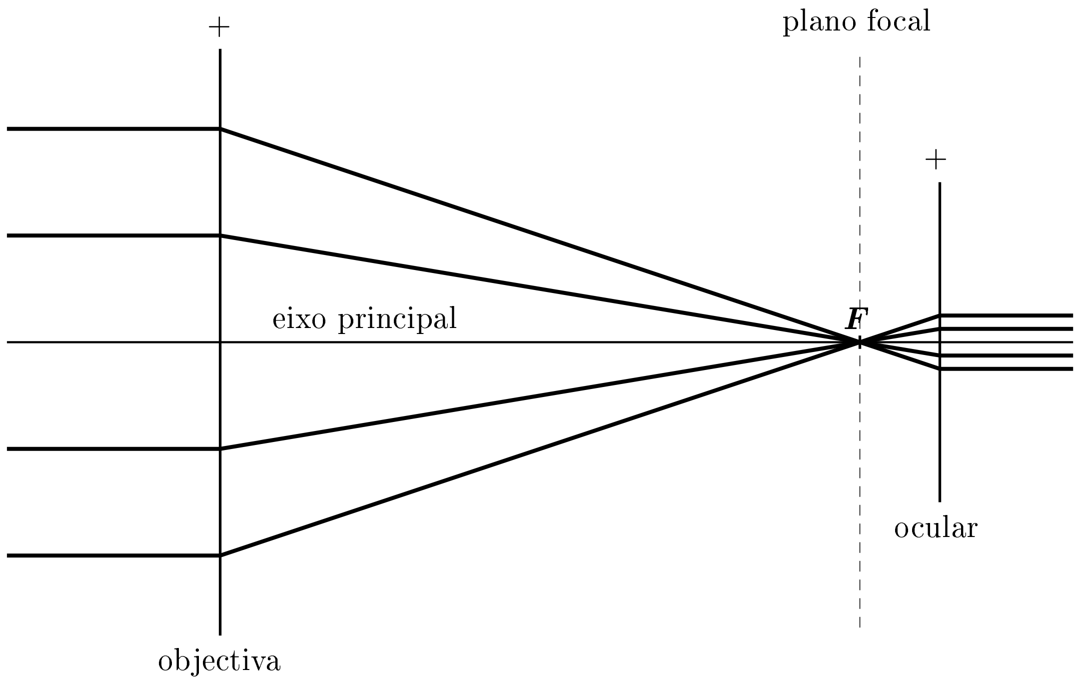
Os raios de luz provenientes da outra estrela incidem na objectiva paralelamente a um eixo auxiliar que faz um ângulo de $2°$ com o eixo principal e convergem, então, no respectivo foco auxiliar, como mostra a figura seguinte



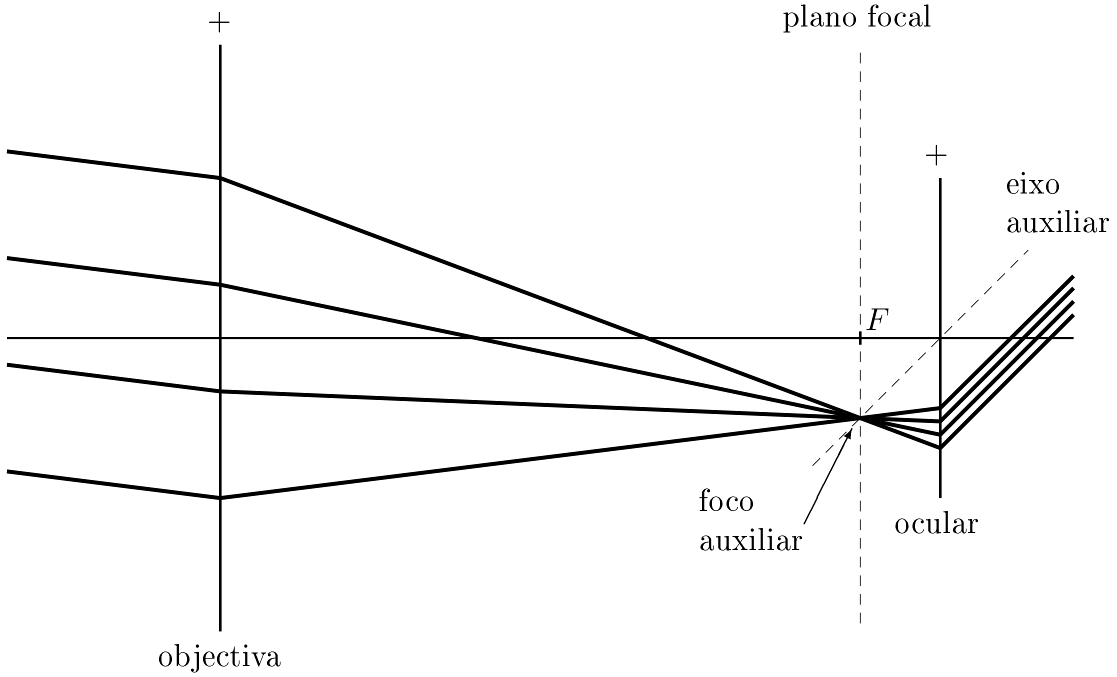
No plano focal da objectiva observamos as duas imagens reais das duas estrelas.

A seguir temos que estudar a passagem dos raios através da ocular. Notar, que a distância entre a ocular e o plano focal da objectiva é igual à distância focal da ocular. Ou seja, as imagens das estrelas encontram-se tambêm no plano focal da ocular. Neste caso verifica-se que os raios de luz são paralelos ao eixo principal/auxiliar após a passagem pela ocular, como mostram as figuras seguintes.

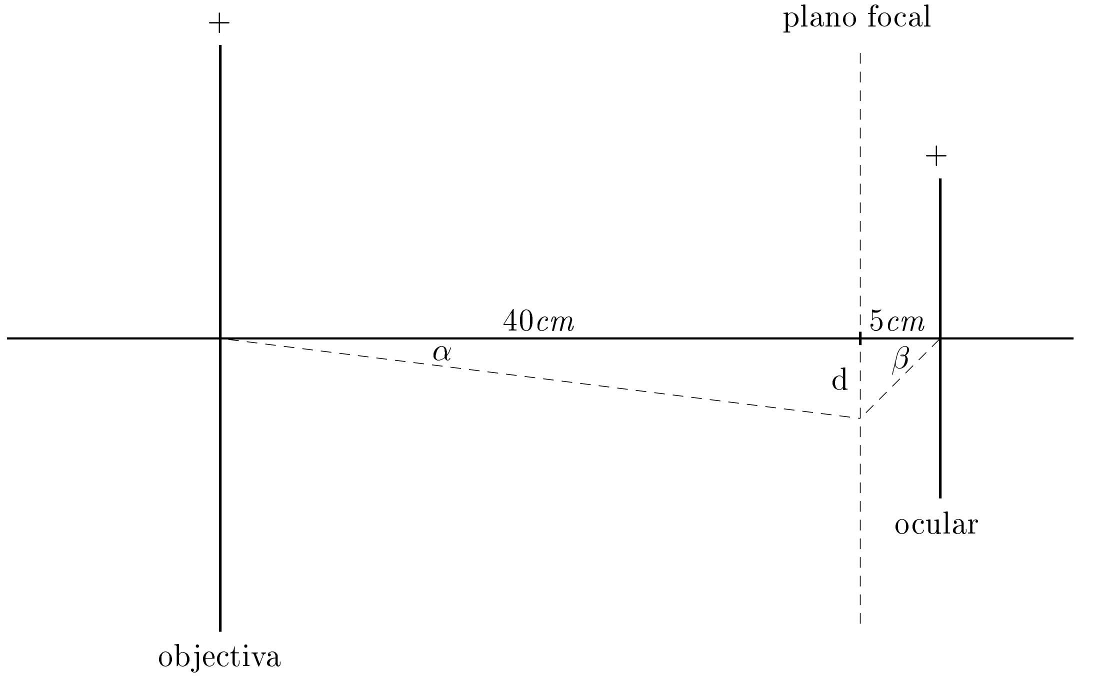
Para a primeira estrela:



e para a segunda estrela:



A questão dos ângulos é mais conveniente estudada considerando a figura seguinte, onde a distância entre as imagens das estrelas é indicada por d.



A partir desta figura obtemos para ângulos α e β pequenos o seguinte

$$\frac{\beta}{\alpha} \approx \frac{\mathrm{tg}(\beta)}{\mathrm{tg}(\alpha)} = \frac{d/5\,cm}{d/40\,cm} = 8 \quad .$$

Portanto, o ângulo β é aproximademente oito vezes maior que o ângulo α. Caso $\alpha = 2^\circ$ obtemos $\beta \approx 16^\circ$.

3. Considere um violino com quatro cordas de tripa (densidade 1,276g/cm^3) com diâmetros diferentes. A parte vibrante de uma corda tem dois pontos fixos: uma ponta onde a corda passa no cavalete do violino e a outra na zona onde a corda está pressionada contra o braço do violino pelo dedo da violinista. A distância máxima entre estes pontos fixos é de 35cm. Na tabela seguinte são dados as espessuras (em mm) e as tensões (em N) das várias cordas, correspondentes à afinação em C-$major$.

corda	tensão (N)	diâmetro (mm)
G	35	1,39
D	50	1,11
A	70	0,88
E	80	0,63

a Deduza a equação de ondas para uma corda.

b Explique o que são harmónicas.

c A que distância do cavalete tem a violinista que prender a corda D, para que possa produzir nela a nota A (427Hz)?

d Em quais das cordas pode a violinista tocar a nota C (256Hz)? Justifique a resposta.

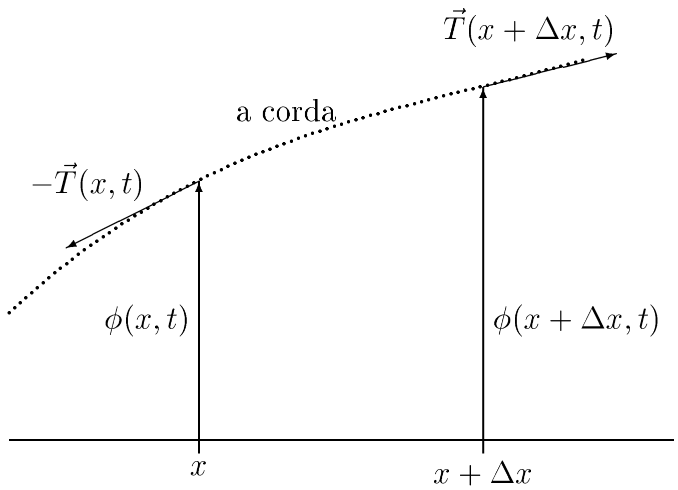
Solução:

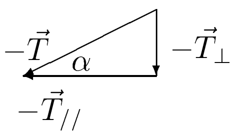
a Na situação de equilíbrio considere uma corda esticada com tensão T_0 ao longo do eixo dos XX. Ignorando a espessura da corda, podemos então, no equilíbrio, considerar caracterizado por x cada ponto material da corda. A cinemática da onda que passa através da corda é descrita pelo deslocamento, ϕ (perturbação), de um ponto material x em função do tempo t, ou seja

$$\phi(x,t) \quad .$$

A perturbação é considerada pequena e transversal, o que implica que o deslocamento é sempre perpendicular à corda ou seja, perpendicular ao eixo dos XX.

A força ΔF que puxa um pequeno segmento da corda na direcção da posição de equilíbrio, é a força resultante da diferença entre as tensões nos extremos do segmento, como se mostra na figura seguinte para o segmento $(x, x+\Delta x)$.





Interessa-nos conhecer $T_\perp(x,t)$, a componente de $\vec{T}(x,t)$ perpendicular ao eixo dos XX. Como se vê na figura, o vector $\vec{T}(x,t)$ faz um ângulo com o eixo dos XX. Para saber este ângulo, consideramos a forma da corda no instante t uma função de x. Notamos que a direcção de $\vec{T}(x,t)$ coincide com a direcção da tangente a esta curva. Por outro lado, $T_{//}(x,t)$, a componente de $\vec{T}(x,t)$ paralela ao eixo dos XX tem que ser igual a $T_{//}(x+\Delta x,t)$, uma vez que não se consideram perturbações longitudonais e portanto a força resultante ΔF tem que ser perpendicular ao eixo dos XX e não pode ter uma componente paralela ao eixo dos XX.

Assim obtemos o seguinte

$$T_{//} = T\cos(\alpha) \quad \text{e} \quad T_\perp = T\sin(\alpha) \quad ,$$

onde T representa o modulo de $\vec{T}(x,t)$ e α o ângulo que o vector $\vec{T}(x,t)$ faz com o eixo dos XX.

Para pequenas perturbações α é tambêm pequeno e $T \approx T_0$. Ficamos com

$$T_{//} \approx T \approx T_0 \quad \text{e} \quad T_\perp \approx T_0\alpha \approx T_0 \mathrm{tg}(\alpha) \quad .$$

Ainda, a tangente de α é igual à derivada de $\phi(x,t)$ em ordem a x, ou seja

$$T_\perp \approx T_0 \, \frac{\partial\phi(x,t)}{\partial x} \quad .$$

Agora estamos nas condições para determinar a diferença entre $\vec{T}(x,t)$ e $\vec{T}(x+\Delta x,t)$. Obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta F(x,t) &= \vec{T}(x+\Delta x,t) - \vec{T}(x,t) \\
&\approx T_\perp(x+\Delta x,t) - T_\perp(x,t) \\
&= \Delta x \, \frac{T_\perp(x+\Delta x,t) - T_\perp(x,t)}{\Delta x} \\
&\approx \Delta x \, \frac{\partial T_\perp(x,t)}{\partial x} \\
&\approx \Delta x \, T_0 \, \frac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2} \quad .
\end{aligned}$$

A aceleração do segmento da corda é, como sempre, dada pela segunda derivada do deslocamento em ordem ao tempo. No entanto, a massa do segmento é dada pelo produto da densidade por unidade de comprimento, μ, pelo comprimento do segmento Δx. Portanto, pela terceira lei de Newton obtém-se a equação de onda para uma corda

$$\mu \, \Delta x \, \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \; = \; \Delta m \, \frac{\partial^2 phi(x,t)}{\partial t^2} \; = \; \Delta F \; = \; \Delta x \, T_0 \, \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2}$$

$$i.e. \qquad \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \; = \; \frac{T_0}{\mu} \, \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} \quad .$$

b Numa corda com extremos fixos qualquer perturbação $\phi(x,t)$ pode descrever-se como sobreposições de perturbações básicas, as harmónicas.

Numa corda que oscila na primeira harmónica, todos os pontos materiais têm a mesma fase, passam todos no mesmo instante pelos posições de equilíbrio, pelos máximos e mínimos da oscilação e por qualquer posição intermédia. Apenas as suas amplitudes são diferentes: máximas nos pontos materiais a meia distância entre os extremos fixos da corda e nulas nos extremos.

Numa corda que oscila na segunda harmónica, o ponto material da corda no centro entre os extremos fixos, tem amplitude nula. Chama-se um nodo de vibração neste ponto. Todos os pontos materiais de um lado do nodo têm a mesma fase, passam todos no mesmo instante pelos posições de equilíbrio, pelos máximos e mínimos da oscilação e por qualquer posição intermédia. Apenas as suas amplitudes são diferentes: máximas nos pontos materiais a meia distância entre um extremo da corda e o nodo, nulas no nodo e nos extremos.

Entre as fases dos deslocamentos dos pontos materiais de um lado do nodo e as fases dos deslocamentos dos pontos materiais do outro lado do nodo há uma diferença de meio ciclo. Quando de um lado se movem todos no sentido pósitivo, no outro lado movem-se todos no sentido contrário, ou seja negativo.

O movimento de metade da corda tem o mesmo aspecto que o movimento de toda a corda quando ela se move na primeira harmónica, com uma diferença: o seu ritmo é duas vezes mais rápido para a segunda harmónica do que para a primeira.

Numa corda que oscila na terceira harmónica existem dois nodos de vibração: um, a um terço da distância entre os extremos fixos da corda e outro a dois terços desta distância. As zonas dentro de dois nodos de vibração ou extremos da corda têm um movimento parecido com o movimento da primeira harmónica, mas com um ritmo três vezes mais rápido. Zonas adjacentes têm uma diferença de fase de meio ciclo.

Numa corda que oscila na quarta harmónica existem três nodos de vibração, na quinta harmónica quatro nodos, etc.

c Para a frequência fundamental, f_1 (primeira harmónica), de uma corda com comprimento L temos a seguinte fórmula

$$f_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{T_0}{\mu}}}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_0}{\mu}} \quad .$$

As cordas do violino têm todas o mesmo comprimento de $35cm$. As tensões nelas estão tabuladas. Faltam então as densidades por unidade de comprimento, μ. Para determinar μ de uma corda de tripa (densidade ρ) com diâmetro d podemos determinar o peso de 1 metro da corda. O valor obtido desta maneira é igual a μ, o peso por metro da corda. A fórmula para este cálculo é a seguinte

$$\begin{aligned} \mu &= (\text{Volume de um metro da corda}) \times \rho \\ &= \left(\frac{\pi}{4}d^2 \times (1 \text{ metro})\right) \times \rho \;=\; \frac{1}{4}\pi d^2 \rho \quad . \end{aligned}$$

Juntando tudo, obtemos para a frequência fundamental, a fórmula

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4T_0}{\pi d^2 \rho}} = \frac{1}{Ld}\sqrt{\frac{T_0}{\pi \rho}} \quad .$$

Para a distância L do cavalete onde a violinista tem que prender a corda D, obtemos então

$$L = \frac{1}{f_1 d}\sqrt{\frac{T_0}{\pi\rho}} = \frac{1}{(427Hz)(1,11 \times (10^{-3}m)}\sqrt{\frac{50N}{\pi\,(1,276 \times 10^3 kg/m^3)}} = 0,236m \quad .$$

Ou seja, a violinista tem que prender a corda D a 23,6cm do cavalete para que a frequência fundamental da corda seja 427 Hz.

d Com os dados da tabela podemos determinar as frequências fundamentais mínimas das cordas, ou seja, para $35cm$ da corda. A fórmula que deduzimos é

$$f_1 = \frac{1}{L\sqrt{\pi\rho}}\frac{\sqrt{T_0}}{d} = \left(0,0451\sqrt{\text{m/kg}}\right) \times \frac{\sqrt{T_0}}{d} \quad .$$

Daí obtemos para as quatro cordas os seguintes valores para as frequências fundamentais mínimas

corda	tensão (N)	diâmetro (mm)	f_1 mínima (Hz)
G	35	1,39	192
D	50	1,11	287
A	70	0,88	429
E	80	0,63	641

Nas cordas D, A e E a violinista não pode tocar a nota C, porque a frequência de $256Hz$ é inferior às frequências fundamentais mínimas destas cordas. Na corda G pode.

4. Considere a desintegração em dois piões de uma partícula ρ em repouso. As massas da partícula ρ e dos piões são respectivamente dadas por $m_\rho c^2 = 770 MeV$ e $m_\pi c^2 = 140 MeV$.
Determine as velocidades dos piões.

Solução: Antes da desintegração o momento linear total é nulo. Depois temos duas partículas idênticas em movimento. A única maneira em que, neste caso, pode existir um momento linear total nulo, é serem as velocidades dos dois piões opostas e de módulos iguais.

Da conservação da energia total, temos a relação

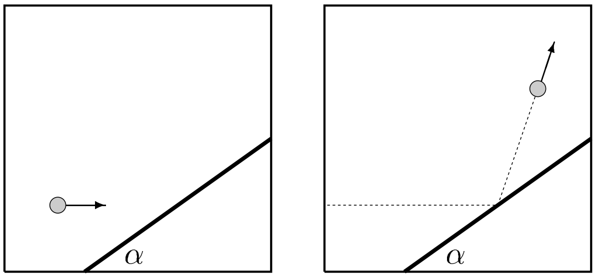
$$m_\rho c^2 = E_{\text{total}} = \frac{m_1 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_2 c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} = 2\frac{m_\pi c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{|v_\pi|}{c}\right)^2}} \quad ,$$

a partir da qual se deduza

$$\sqrt{1-\left(\frac{|v_\pi|}{c}\right)^2} = 2\frac{m_\pi c^2}{m_\rho c^2} \iff \frac{|v_\pi|}{c} = \sqrt{1-4\left(\frac{m_\pi c^2}{m_\rho c^2}\right)^2} = 0,932 \quad .$$

5. Considere uma parede inclinada que faz um ângulo α com a horizontal. Contra esta parede é lançada, com uma velocidade horizontal de 3 m/s, uma bola de ping-pong que salta elasticamente para cima.
Desprezando a resistência do ar ao movimento, determine a altura máxima que a bola pode atingir e o valor do ângulo α correspondente.

Solução: A situação descrita está representada nas figuras seguinte



Antes do choque Depois do choque

A altura máxima que uma bola, lançada com uma certa velocidade inicial, atinge, depende do ângulo de lançamento, sendo maior quando é lançada verticalmente.

Como se vê nas figuras, para saltar na direcção vertical depois do choque com a parede, o ângulo de inclinação da parede tem de ser 45°. A altura é neste caso simplesmente dada pela conservação da energia: energia cinética inicial, $\frac{1}{2}mv^2$, igual à energia potencial gravítica quando a bola se encontra no ponto mais alto, mgh, ou seja

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \iff h = \frac{v^2}{2g} = \frac{9m^2/s^2}{2 \times 9,81 m/s^2} = 0,46m \quad .$$

6. Uma roda de quinze quilos rola para baixo ao longo de uma descida de dez metros de altura.
Considerando a roda aproximadamente como um disco de densidade homogénea e com meio metro de diâmetro, determine a velocidade com que a roda chega ao fim da descida.

Solução: O momento de inércia de um disco de massa m e raio R é $I = \frac{1}{2}mR^2$. A energia total do disco, E, a uma certa altura h, é dada pela soma da sua energia potencial gravítica, mgh, da sua energia cinética de deslocamento, $\frac{1}{2}mv^2$, e da sua energia cinética de rotação, $\frac{1}{2}I\omega^2$, representando v a velocidade do disco e ω a sua velocidade angular. A relação entre v e ω é dada por $v = \omega R$. Obtemos então

$$E = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2 = mgh + \frac{3}{4}mv^2 \quad .$$

No início da descida a velocidade é nula. Portanto,

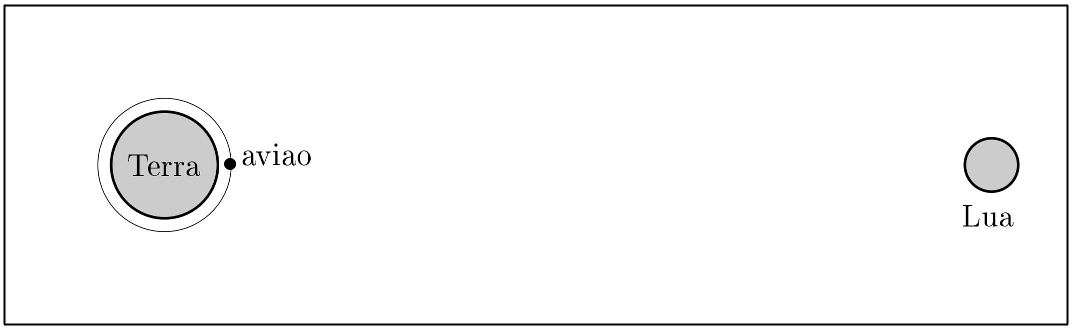
$$E = mgh = 15 \times 9,81 \times 10 \; N = 1,47 \times 10^3 \; N; \quad .$$

No fim da descida a altura é nula. Portanto

$$1,47 \times 10^3 \; N = E = \frac{3}{4}(15kg)v^2 \quad \Longleftrightarrow \quad v = 11,4m/s; \quad .$$

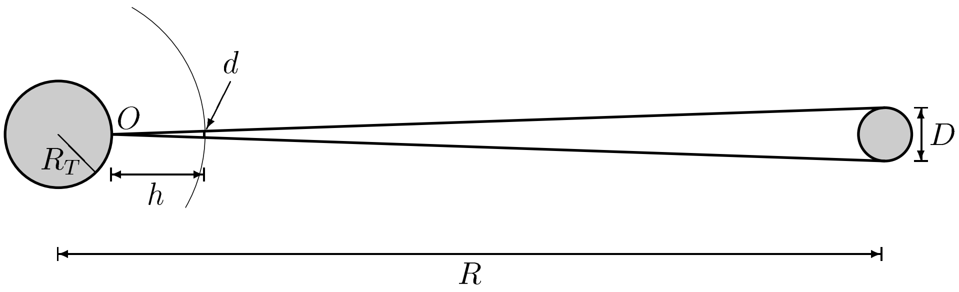
7. Numa noite clara com Lua Cheia observa-se que um avião, a voar a uma distância de dez quilómetros da observadora, demora 0,43s a passar em frente da Lua, numa trajectória que passa em frente do centro da Lua.
Determine a velocidade do avião.

Solução: A situação descrita está representada na figura seguinte



Não sabendo de que sítio da superfície da Terra foi observada a passagem do avião em frente da Lua, podemos escolher o mais conveniente, que corresponde à Lua estar no zénite, ou seja, verticalmente por cima da observadora. Neste caso, seja R a distância do centro da Lua ao centro da Terra e h a distância do avião à superfície da Terra.

Para a distância, d, que o avião percorre, enquanto passa em frente da Lua, relativamente a um observador que se encontra na posição indicada por O, temos o seguinte



onde D representa o diâmetro da Lua. Da figura vimos que $\dfrac{d}{h} = \dfrac{D}{R - R_T}$.

Também, $R - R_T = R \times \left(1 - \dfrac{R_T}{R}\right) = R \times (1 - 0,0166) \approx R$ (erro de 1,7 porcento), portanto, $\dfrac{d}{h} = \dfrac{D}{R}$, ou seja $d = \dfrac{hD}{R}$.

O avião percorre a distância d no intervalo de tempo $\Delta t = 0,43$ *segundos*. Para a velocidade, v, temos então

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{hD}{R\Delta t} = 211 m/s = 759 km/h \quad .$$

8. Considere um osciloscópio no qual a deflexão do sinal luminoso no ecrã é proporcional à diferença de potencial eléctrico entre as placas de deflexão, nomeadamente 1 *cm* por cada *Volt* de diferença potencial. A deflexão é para a direita quando existe uma diferença de potencial positiva entre as placas de deflexão horizontal, isto é quando $\Delta V_x > 0$, e é para a esquerda quando $\Delta V_x < 0$. A deflexão é para cima quando existe uma diferença de potencial positiva entre as placas de deflexão vertical, isto é quando $\Delta V_y > 0$, e é para baixo quando $\Delta V_y < 0$. No equilíbrio ($\Delta V_x = \Delta V_y = 0$) o sinal luminoso encontra-se no centro do ecrã.
Desenhe e descreva a imagem que se forma no ecrã do osciloscópio nos seguintes casos (em que t representa o tempo):

a $\Delta V_x = 3\sin(2\pi t)$ *Volts* e $\Delta V_y = 0$.

b $\Delta V_x = 3\sin(2\pi t)$ *Volts* e $\Delta V_y = 3\sin(2\pi t)$ *Volts*.

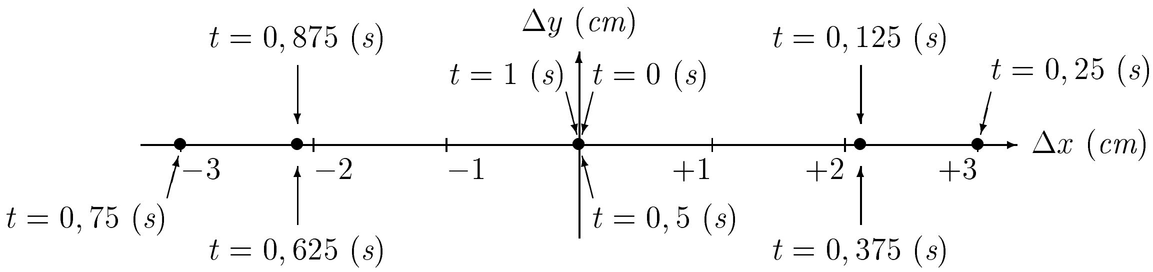
Solução: A deflexão é proporcional à diferença de potencial elétrico (1 cm/V). Considere Δx e Δy as deflexões relativamente à posição do equilíbrio, respectivamente horizontal e vertical, do sinal luminoso no ecrã do osciloscópio. Temos

$$\Delta x \text{ (em } cm) \;=\; \Delta V_x \text{ (em } Volts) \quad e \quad \Delta y \text{ (em } cm) \;=\; \Delta V_y \text{ (em } Volts) \quad .$$

a Os dados correspondem a $\Delta x = 3\sin(2\pi t)$ cm e $\Delta y = 0$. O período do sinal é igual a $1s$. Considere então os seguintes valores:

t (s)	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1,0
Δx (cm)	0	2,12	3,0	2,12	0	-2,12	-3,0	-2,12	0
Δy (cm)	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Estes valores correspondem à seguinte figura

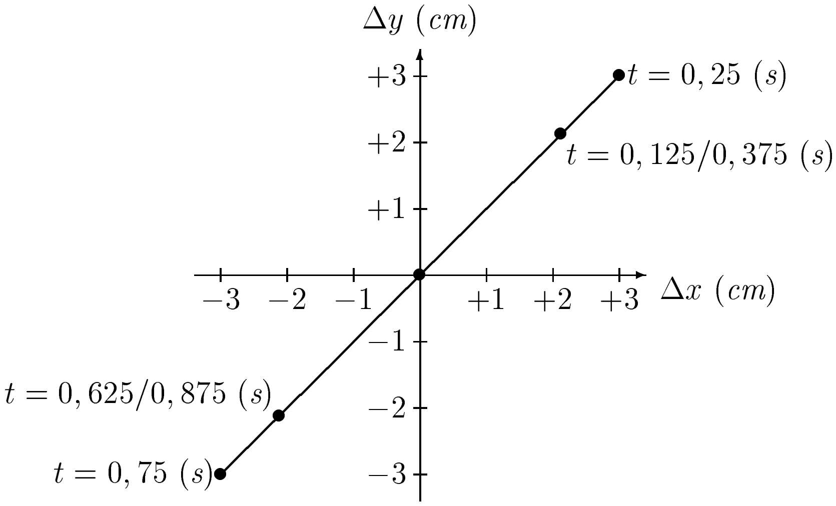


O sinal luminoso oscila horizontalmente ao longo do eixo dos XX entre os pontos $x = -3$ cm e $x = +3$ cm, com uma frequência de uma volta por segundo.

b Os dados correspondem a $\Delta x = 3\sin(2\pi t)$ cm e $\Delta y = 3\sin(2\pi t)$ cm. Os períodos de ambos os sinais são iguais a $1s$. Considere então os seguintes valores:

t (s)	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1,0
Δx (cm)	0	2,12	3,0	2,12	0	-2,12	-3,0	-2,12	0
Δy (cm)	0	2,12	3,0	2,12	0	-2,12	-3,0	-2,12	0

Estes valores correspondem à seguinte figura



O sinal luminoso oscila ao longo de uma linha recta entre os pontos $(x = -3,\ y = -3)$ cm e $(x = +3,\ y = +3)$ cm, com uma frequência de uma volta por segundo.

9. Considere um referencial de inércia S' que se move com velocidade constante $\vec{V}$ relativamente a um outro referencial S. Em cada um dos referenciais é estudado o movimento de um objecto que se move na direcção de $\vec{V}$. Considere ainda que tanto $V = \left|\vec{V}\right|$ como a velocidade do objecto são comparáveis à velocidade da luz. Considere os eixos dos XX, em ambos os referenciais, com a direcção e sentido da velocidade relativa $\vec{V}$.
Considere que $p' = mv'/\sqrt{1-(v'/c)^2}$ e $E' = mc^2/\sqrt{1-(v'/c)^2}$ representam respectivamente o momento linear e a energia total do objecto relativamente ao referencial S'.
Para as correspondentes grandezas, p e E, relativamente ao referencial S, usando a relação $v = (v'+V)/(1+Vv'/c^2)$ entre as velocidades do objecto, v e v', respectivamente nos referenciais S e S', obtemos as transformações

$$pc = \frac{p'c + \beta E'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{e} \quad E = \frac{E' + \beta p'c}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{com} \quad \beta = \frac{V}{c} \quad .$$

Exprima $E^2 - (pc)^2$ **a**) nas grandezas $p'c$ e E';
b) na grandeza mc^2.

Solução:

a

$$\begin{aligned}
E^2 - (pc)^2 &= \left(\frac{E' + \beta p'c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 - \left(\frac{p'c + \beta E'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{1-\beta^2}\left\{(E' + \beta p'c)^2 - (p'c + \beta E')^2\right\} \\
&= \frac{1}{1-\beta^2}\left\{(E')^2\left(1-\beta^2\right) - (p'c)^2\left(1-\beta^2\right)\right\} \\
&= (E')^2 - (p'c)^2
\end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned}
E^2 - (pc)^2 &= \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)^2 - \left(\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{1-(v/c)^2}\left\{\left(mc^2\right)^2 - (mv)^2\right\} \\
&= \frac{1}{1-(v/c)^2}\left\{\left(mc^2\right)^2\left(1-(v/c)^2\right)\right\} \\
&= \left(mc^2\right)^2
\end{aligned}$$

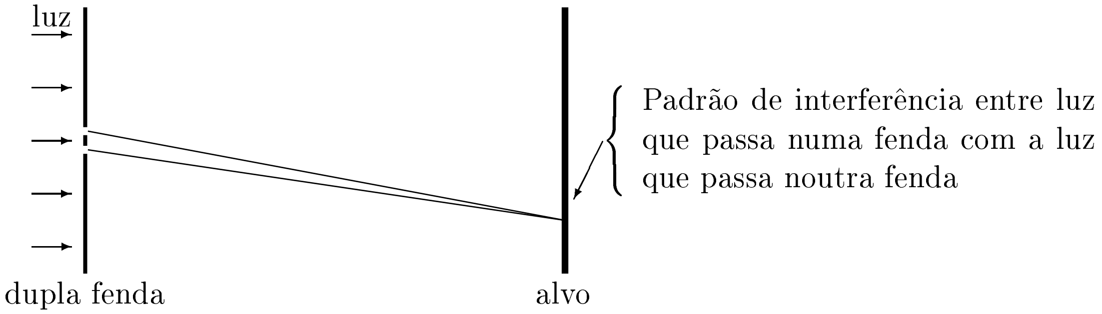
10.

a Deduza a fórmula $\frac{\lambda D}{d}$ para as distâncias entre as manchas claras num alvo que se encontra a uma distância D de um sistema de duas fendas estreitas iluminadas por luz monocromática. (d representa a distância entre as duas fendas e λ o comprimento de onda da luz.)

b Duas fendas estreitas são iluminadas por luz composta por radiação de dois comprimentos de onda, $656nm$ (cor de laranja) e $410nm$ (violeta). Num alvo a 2 metros de distância das fendas observa-se que os máximos de terceira ordem da cor laranja ficam 1,2cm separados dos máximos violetas de terceira ordem. Qual a distância entre as duas fendas?

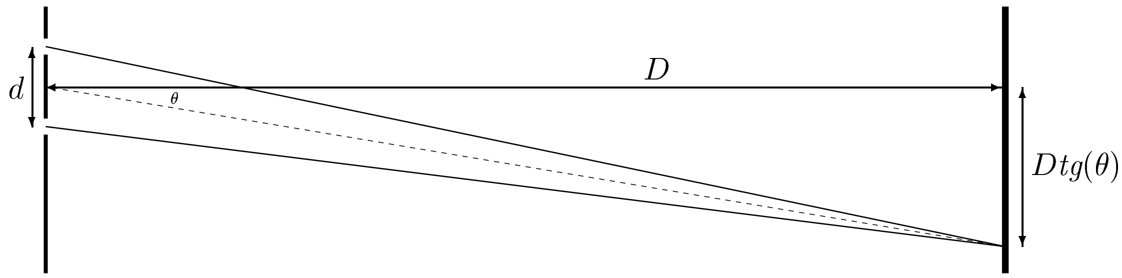
Solução:

a



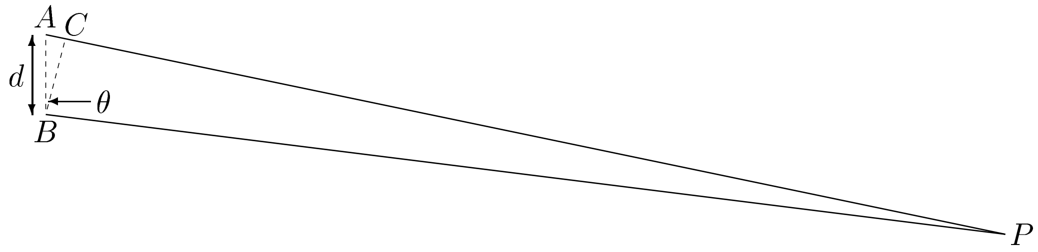
Quando os comprimentos dos dois raios de luz, um que passa numa fenda e outro que passa noutra fenda, têm, ao encontrar-se no alvo, uma diferença de um múltiplo, m, de λ, o comprimento de onda da luz, a sua interferência é constructiva. O que resulta é uma mancha clara no alvo.

Para a determinação da diferença entre os comprimentos de dois raios, um da cada uma das fendas, que se cruzam no alvo, é necesário estudar a geometria da situação. A figura seguinte mostra pormenores ampliados.



Um determinado sítio no alvo é parametrizado por um ângulo, θ, a partir do centro entre as duas fendas. Assim, podemos definir o centro do alvo como sendo o sítio que corresponde ao ângulo $\theta = 0$. A distância entre o centro do alvo e um sítio qualquer é consequentemente dada por $Dtg(\theta)$, onde d representa a distância entre as fendas e o alvo.

Na figura seguinte estuda-se a procurada diferença no caminho da luz proveniente de uma e da outra fenda. A indica a posição de uma fenda e B da outra. P indica um sítio no alvo, também indicado por θ.



O ponto C é escolhido de tal modo que $CP = BP$. A diferença entre os comprimentos de AP e BP é portanto dada por AC.

No caso $D \gg d$ temos que o ângulo ACB é aproximadamente igual a $90°$ e o ângulo ABC aproximadamente igual a θ. Portanto, $AC \approx d\sin(\theta)$.

No entanto, para $\theta \ll 1$ temos ainda que $\sin(\theta) \approx tg(\theta) \approx \theta$. Daí resulta que os sítios das manchas claras são dados por

$$m\lambda = AC \approx d\theta = d\frac{D\theta}{D} \iff Dtg(\theta) \approx \frac{mD\lambda}{d} \quad .$$

b A distância entre as manchas claras de terceira ordem das cores laranja e violeta é dada por:

$$1,2cm = 3\frac{\lambda_1 D}{d} - 3\frac{\lambda_2 D}{d} = 3\frac{D}{d}(\lambda_1 - \lambda_2) \quad .$$

Portanto,

$$d = 3\frac{D}{1,2cm}(\lambda_1 - \lambda_2) = 0,123mm \quad .$$