FÍSICA GERAL I (Lista dos assuntos para o exame 2000/2001)

Os seguintes capítulos do livro **Introdução à Física** dos autores Jorge Dias de Deus, Mário Pimenta, Ana Noronha, Teresa Peña e Pedro Brogueira:

1. Espaço e tempo, escalas e medições

1.1 Introdução
1.2 A história de Newton
1.3 O espaço-tempo
1.4 Medir distâncias
1.5 Medir intervalos de tempo
1.6 Os limites da medição
1.7 Os erros da medição

2. As ondas: transmissão de informação

2.1 As ondas: ver e ouvir
2.2 Como descrever uma onda?
2.3.2 Equação de ondas para uma corda vibrante
2.4.1 Ondas transversais e longitudinais
2.4.3 Efeito Doppler
2.4.4 Ondas progressivas e ondas estacionárias, sobreposição das ondas
2.4.5 Dispersão
2.5 Princípio de Huygens
2.5.1 Reflexão
2.5.2 Refracção
2.5.3 Padrão de interferência de duas fendas
2.6 Lentes e a formação de imagens

3. Das simetrias no espaço-tempo à Mecânica

3.1 Simetrias e invariâncias
3.2 O princípio variacional de Hamilton e a Mecânica
3.3 Regresso a Newton
3.4 Graus de liberdade e coordenadas generalizadas
3.5 A energia mecânica
3.6 O momento linear
3.7 O momento angular
3.8 Leis de conservação
3.9.2 O oscilador harmónico
3.9.3 O oscilador com atrito (amortecido)

4. A relatividade de Galileu a Einstein

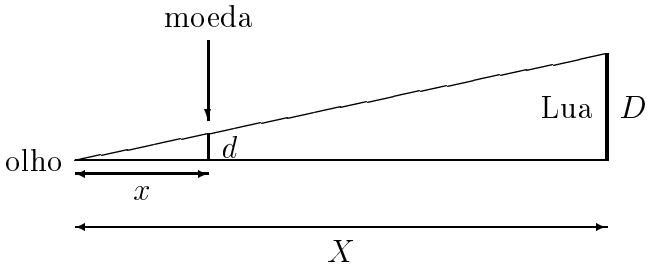
4.1 Referenciais acelerados e referenciais de inércia
4.2.1 Comparação entre luz e som
4.3 A relatividade de Einstein
4.4 A transformação de Lorentz numa dimensão espacial
4.4.1 Transformação de Lorentz para as coordenadas
4.4.2 Transformação de Lorentz para as velocidades
4.5.1 O momento linear
4.5.2 A energia
4.5.3 Transformação de Lorentz para o momento linear e a energia
4.5.4 Colisão inelástica

Soluções de alguns problemas dos primeiros quatro capítulos do livro do curso Fisíca Geral I, *Introdução à Fisíca* dos autores Jorge Dias de Deus, Mário Pimenta, Ana Noronha, Teresa Peña e Pedro Brogueira.

1 Os problemas do capítulo 1

1.1 Um ano-luz = (velocidade da luz) × (o tempo de um ano).
velocidade da luz = $c \approx 3,00 \times 10^8\ ms^{-1}$
1 ano ≈ 365,24 dias = $365,24 \times 24 \times 3600$ segundos $\approx 3,156 \times 10^7\ s$.
Então, 1 ano-luz $\approx 3,00 \times 10^8 \times 3,156 \times 10^7 = 0,947 \times 10^{16}\ m$.
distância Terra-Proxima Centauri = $\dfrac{4,047 \times 10^{16}\ m}{0,947 \times 10^{16}\ m}$ ano-luz $\approx 4,27$ ano-luz.

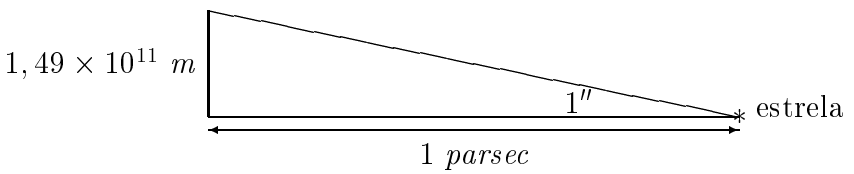
1.2



D = diametro Lua = $3,476 \times 10^6\ m$
X = distância Lua-Terra (Lua-olho) = $4 \times 10^8\ m$
d = diametro moeda (de 100 escudos) = $2,5 \times 10^{-2}\ m$
x = distância moeda-olho.

$\dfrac{x}{d} = \dfrac{X}{D}$, portanto $x = X\dfrac{d}{D} = 4 \times 10^8\ m \times \dfrac{2,5 \times 10^{-2}\ m}{3,476 \times 10^6\ m} = 2,88\ m$

1.3



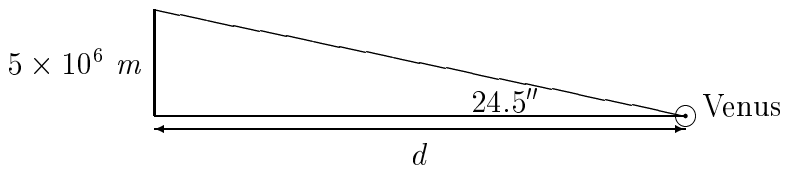
$\dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{1\ parsec} = \text{tg}\,(1'') = \text{tg}\,(4,85 \times 10^{-6}\ rad) = 4,85 \times 10^{-6}$

a) $1\ pc = 1\ parsec = \dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{\text{tg}\,(1'')} = \dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{4,85 \times 10^{-6}} = 0,31 \times 10^{17}\ m.$

b) $1\ parsec = \dfrac{0,31 \times 10^{17}\ m}{0,947 \times 10^{16}\ m}$ ano-luz $\approx 3,3$ ano-luz.

c) $d_{\max} = \dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{\mathrm{tg}\,(0,02'')} \approx \dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{0,02\mathrm{tg}\,(1'')} = 50 \times \dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{\mathrm{tg}\,(1'')} = 50\ pc.$

1.4



d = distância Terra-Venus no ponto de maior aproximação .

$\dfrac{5 \times 10^6\ m}{d} = \mathrm{tg}\,(24,5'') \approx 24,5 \times \mathrm{tg}\,(1'') = 1,19 \times 10^{-4},$

então: $d = \dfrac{5 \times 10^6\ m}{1,19 \times 10^{-4}} = 4,2 \times 10^{10}\ m.$

1.5 Do resultado obtido no problema 1.4 deduz-se: $ct = 4,2 \times 10^{10}\ m,$

então: $t = \dfrac{4,2 \times 10^{10}\ m}{3,00 \times 10^8\ ms^{-1}} = 1,4 \times 10^2\ s.$

1.6 Defina-se: $d = ct$, a distância Terra-Lua; $\Delta t = 10^{-9}\ s$, o mais pequeno intervalo de tempo que se consegue medir; $\Delta d =$, o erro na determinação da distância Terra-Lua. Logo

$d \pm \Delta d = c(t \pm \Delta t)$ e $\Delta d = c\Delta t = (3,00 \times 10^8\ ms^{-1}) \times (10^{-9}\ s) = 0,3\ m.$

1.7 h = profundidade da superfície da água no poço, t_q = tempo de queda da pedra e t_s = tempo da demora do som. Tomando a velocidade do som infinito, em que caso $t_q = 3\ s$, obtemos

$h = \frac{1}{2} g t_q^2 = \frac{1}{2}\,(9,8\ ms^{-2}) \times (3\ s)^2 = 44,1\ m.$

No entanto, dado que a velocidade do som não é infinita, mas v =344 ms^{-1}, temos

$3\ s = t_q + t_s = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + \dfrac{h}{v},$

o que nos leva à equação quadrática $x^2 + xv\sqrt{\dfrac{2}{g}} - 3v = 0$, com $x = \sqrt{h}$. Esta equação é resolvida por

$x = \frac{1}{2}\left(-v\sqrt{\dfrac{2}{g}} + \sqrt{\dfrac{2v^2}{g} + 12v}\right).$

Substituindo os valores para v e g obtem-se $h = 40,7\ m$. Uma diferença de 3,4 m com o valor obtido sem contar com a velocidade finita do som.

1.8 Distância = $vt = (344\ ms^{-1}) \times (10\ s) = 3,4 \times 10^3\ m.$
Sobre uma distância da ordem de 3 km a luz demora um intervalo de tempo da ordem de $10^{-5}\ s$. Então o erro cometido na determinação do tempo da demora do som é $10^{-5}\ s$ em 10 s, ou seja um fracção de 10^{-6}. A distância é proporcional com o tempo, logo sofre tambêm um erro desta ordem

da grandeza, ou seja 3 *mm* em 3 *km*.

1.12 Desintegração radioactiva: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. $N(t)$ representa o número de átomos ainda nao desintegrados no instante t, λ a constante de decaimento. O número de átomos ainda nao desintegrados no instante $t = 0$ é dado por $N(t = 0) = N_0 e^0 = N_0$.
O período de semitransformação , $T_{1/2}$, defina-se pelo tempo que demora até a metada dos átomos iniciais, N_0, se desintegrar, então $N\left(t = T_{1/2}\right) = \frac{1}{2} N_0$.

a) $\frac{1}{2} N_0 = N\left(T_{1/2}\right) = N_0 \exp\left(-\lambda T_{1/2}\right)$, ou seja $-\log(2) = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T_{1/2}$.
Logo $\lambda = \dfrac{\log(2)}{T_{1/2}} = \dfrac{\log(2)}{5,730 \times 10^3 \text{ anos}} = \dfrac{\log(2)}{1,808 \times 10^{11} \text{ s}} = 3,83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$.

b) A intensidade da radiação (o número de desintegrações por unidade de tempo) é proporcional com o número de átomos ainda disponível a desintegrar-se, $N(t)$.
Então, $10,8$ *des/g/s* $= 13,5 \times e^{-\lambda t}$ *des/g/s*.
Logo $\lambda t = \log\left(\dfrac{13,5}{10,8}\right)$, ou seja $t = \dfrac{T_{1/2}}{\log(2)} \times \log\left(\dfrac{13,5}{10,8}\right) = 1845$ *anos*.

c) $T_{1/2} = 5730 \pm 30$ *anos* e o valor da datação obtido em (b) é proporcional com $T_{1/2}$. Logo $\dfrac{\Delta T_{1/2}}{T_{1/2}} = \dfrac{\Delta t}{t}$. Agora, 30 é 0,52 porcento de 5730, então o erro em t também é deste tamanho, ou seja 0,52 porcento de 1845. Portanto, $\Delta t = 9,7$ *anos*.

2 Os problemas do capítulo 2

2.1 a) A frequência, f, da oscilação é igual a $f = 10\ min^{-1} = 10\ (60\ seg)^{-1} = 0,167\ Hz$. O comprimento de onda, λ, lê-se da figura: $\lambda = 30\ m$. A velocidade de propagação da onda, v, é dada por $v = f\lambda = 5\ ms^{-1}$. A amplitude, A, também se lê na figura: A altura de uma crista de onda relativamente a um vale é 4 m. Portanto para amplitude de onda temos $A = 2\ m$.

b) O comprimento de onda, λ, lê-se da figura: $\lambda = 0,78\ m$. A velocidade de propagação da onda, v, é dada no texto, $v = 344\ ms^{-1}$. Portanto para a frequência temos $f = \dfrac{v}{\lambda} = 441\ Hz$. Do texto do problema podemos também deduzir a amplitude de onda: A diferença de pressão entre uma região de compressão e uma região de descompressão do ar é igual a 28 *Pa*. Portanto para amplitude de onda temos $A = 14\ Pa$.

c) A onda do mar (exercício a) é progressiva e transversal (as oscilações são perpendiculares à direcção de propagação da onda). A perturbação , $\phi(x,t)$, em função da coordenada, x, da posição de equilíbrio de um ponto da superfície do mar e em função do tempo, t, descreve-se matematicamente por $\phi(x,t) = A\cos\left[\frac{\omega}{v}(x - vt) + \alpha\right]$, onde ω, a frequência angular, está relacionada com f por $\omega = 2\pi f$ e onde α representa uma fase qualquer. Substituindo os valores do exercício (a), obtemos $\phi(x,t) = 2\cos\left[0,21 \times (x - 5t) + \alpha\right]\ (m)$.

A onda sonóra no interior do tubo de órgão (exercício b) é estacionária e longitudinal (as oscilações são paralelas à direcção de propagação da onda). A onda estacionária podemos considerar que é

composta por duas ondas, uma com velocidade da onda v e outra com velocidade $-v$. A perturbação , $\phi(x,t)$, em função da coordenada, x, da posição de equilíbrio de uma molecula do ar e em função do tempo, t, descreve-se matematicamente por $\phi(x,t) = \frac{A}{2}\cos\left[\frac{\omega}{v}(x-vt)+\alpha\right] + \frac{A}{2}\cos\left[\frac{\omega}{v}(x+vt)+\beta\right] = A\cos\left[\frac{\omega}{v}x+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right] \times \cos\left[\omega t-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$, onde ω, a frequência angular, está relacionada com f por $\omega = 2\pi f$ e onde α e β representam fases quaisquer (no entanto relacionadas pela configuração do tubo de órgão). Substituindo os valores do exercício (b), obtemos $\phi(x,t) = 14\cos\left[8x+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[2771t-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$ (Pa). Repare que as amplitudes das oscilações das moleculas são diferentes dependente da posição do equilíbrio, x, das moleculas, *i.e.* $Amplitude = 14\cos\left[8x+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]$ (Pa). De facto esta fórmula refere-se às oscilações da pressão, mas estas estão relacionadas com as oscilações das moleculas. O movimento oscilatório é descrito pela segunda parte da fórmula, *i.e.* $\cos\left[2771t-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$, onde se lê que todas as moleculas do tubo oscilam em fase no mesmo sentido, ou no sentido oposto (depende do sinal da *Amplitude*).

d) 1 $atm \approx 10^5$ Pa, portanto 28 $Pa \approx 0,28 \times 10^{-3}$ atm.

2.2 Considere o vector $\vec{\phi}(x,t)$ que descreve a posição no instante t de um pedaço da corda que no equilíbrio se encontra na posição indicada por x. Este vector está sempre perpendicular à corda apontando da posição x para fora (na direcção do vertical no caso em consideração), mas varia de modulo e de sentido em função do tempo.
O vector $\vec{\phi}$ deixa-se decompor em dois componentes, um perpendicular á ranhura e um paralelo á ranhura. A componente perpendicular não pode passar para o outro lado da ranhura. Portanto, passa apenas a componente paralela. Se θ é o ângulo entre a ranhura e o vector $\vec{\phi}$ e ainda a perturbação na corda descrita por $\vec{\phi}(x,t) = A\cos\left[\frac{\omega}{v}(x-vt)+\alpha\right]\vec{e}_z$, então depois de passar da ranhura descreve-se a onda por $\vec{\phi}(x,t) = A\cos(\theta)\cos\left[\frac{\omega}{v}(x-vt)+\alpha\right]\vec{e}_r$, onde $\vec{e}_r$ representa o vector unidade paralelo á ranhura.
Além da direcção da oscilação , também a amplitude é diferente: $A_r = A\cos(\theta)$ representa a amplitude depois da onda passar na ranhura. Repare que a frequência, o comprimento de onda e a sua velocidade ficam iguais depois da passagem.

a) $\theta = 0$, então $A_r = A$.

b) $\theta = \frac{\pi}{4}$, então $A_r = A/\sqrt{2}$.

c) $\theta = \frac{\pi}{2}$, então $A_r = 0$.

d) A intensidade do sinal é proporcional com o quadrado da amplitude, portanto é diferente depois da passagem.

e) Ondas longitudinais têm oscilações na direcção da "corda" (não há componentes perpendiculares á ranhura) e passam então na ranhura sem problemas.

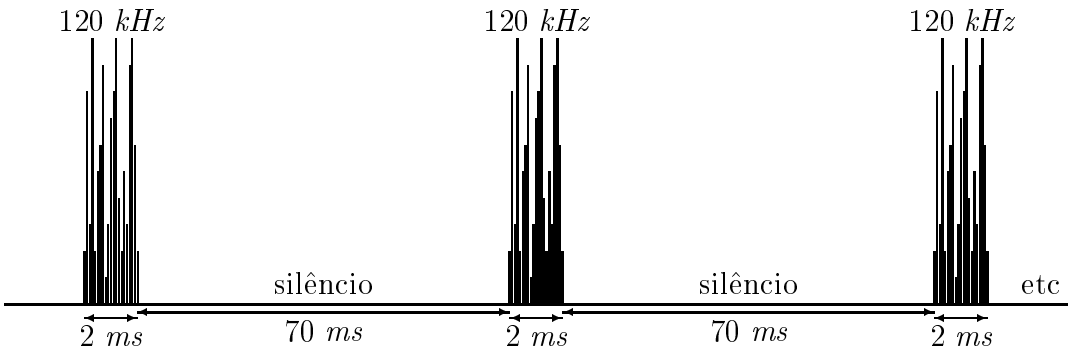
2.3 $f = \frac{c}{\lambda}$ e $c = 3,0 \times 10^8\ ms^{-1}$.

$\lambda\ (m)$	$f\ (Hz)$
$4,0 \times 10^{-7}$	$0,75 \times 10^{15}$
$7,5 \times 10^{-7}$	$0,40 \times 10^{15}$

2.4 $\lambda = \frac{v}{f}$ e $v = 344\ ms^{-1}$.

$f\ (Hz)$	$\lambda\ (m)$
20	17
20×10^3	$0,017$

2.5



a) O período do sinal global é igual a 72 *ms*. Então a frequêcia do sinal global é igual a $f = \frac{1}{T} = 13,9\ Hz$. A velocidade do som é igual a $v = 344\ ms^{-1}$. Então o comprimento de onda do sinal global é igual a $\lambda = \frac{v}{f} = vT = 24,8\ m$.

b) O tempo entre emissão e recepção tem que ser menos que 70 *ms*. Portanto, $2 \times \ell\ <\ v \times (70 \times 10^{-3}\ s) = 24\ m$. A distância máxima a que o morcego se pode afastar de um objecto, de forma a que a recepção do impulso sonoro reflectido pelo objecto não seja misturado com o som emitido no impulso seguinte, é igual a $\ell_{\max}\ =\ 12\ m$.

c) $\lambda(120\ kHz) = \frac{344\ ms^{-1}}{120 \times 10^3\ s^{-1}} = 2,9 \times 10^{-3}\ m$. Então, com 120 *kHz* o morcego não pode detectar insectos de comprimentos inferiores a 2,9 *mm*.

2.7 A equação de ondas para uma corda é dada por $\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2}$, onde μ representa a massa por unidade de comprimento da corda e T a tensão na corda. Com $\phi(x,t) = A\cos\left[\frac{\omega}{v}(x - vt)\right]$, onde ω representa a frequência angular e v a velocidade de propagação da onda, obtem-se da equação de ondas a relação $-\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = -\frac{\mu}{T}\omega^2$, resolvida por $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

a) $v = \sqrt{\frac{1090\ N}{0,07\ kgm^{-1}}} = 125\ ms^{-1}$.

b) Para a frequência fundamental uma corda tem dois nodos, um a cada extremo. Este caso corresponde a $\ell = \frac{1}{2}\lambda$, onde ℓ representa o comprimento da corda. Logo $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2\ell} = 26,4\ Hz$.

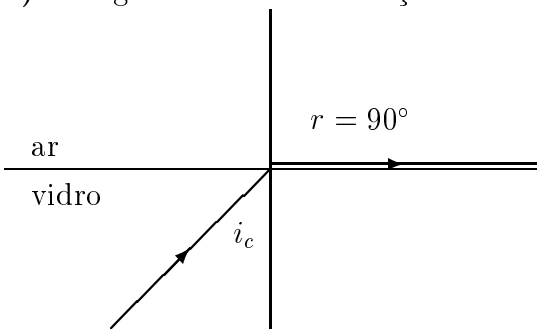
c) A corda transmite às moleculas do ar oscilações com o mesmo ritmo da vibração da corda. Portanto, o som no ar tem uma frequêcia de $f_{\text{ar}} = 26,4\ Hz$. O comprimento de onda do som no ar é dado por $\lambda_{\text{ar}} = \frac{v_{\text{som}}}{f_{\text{ar}}} = 13,0\ m$.

2.8 Do exercício 2.7 temos a relação entre a velocidade, v, da onda na corda, a tensão, T, na corda e a massa, μ, por unidade de comprimento da corda, *i.e.* $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Para a frequência fundamental temos, também do exercício 2.7, $\ell = \frac{1}{2}\lambda$, onde ℓ representa o comprimento da corda. Logo, $\mu = \frac{T}{v^2} = \frac{T}{(f\lambda)^2} = \frac{T}{(2f\ell)^2}$. Portanto, $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1/\left(f_1\ell_1\right)^2}{1/\left(f_2\ell_2\right)^2} = \left(\frac{(32,8\ Hz)\times(1,98\ m)}{(4186\ Hz)\times(0.051\ m)}\right)^2 = 0,09$.

2.14 A velocidade da luz no ar é aproximadamente igual à velocidade da luz no vácuo, $c = 3,0\times10^8\ ms^{-1}$. Para determinar a velocidade da luz no vidro temos a relação $v = \frac{c}{n}$. Como $n = 1,5$, resulta $v_{\text{vidro}} = 2,0\times10^8\ ms^{-1}$.

a) Para os comprimentos de onda da luz verde no ar, λ_{ar}, e no vidro, λ_{vidro}, temos a seguinte relação $\frac{\lambda_{\text{ar}}}{\lambda_{\text{vidro}}} = \frac{v_{\text{ar}}/f_{\text{ar}}}{v_{\text{vidro}}/f_{\text{vidro}}}$. As oscilações ocorrem com os mesmos ritmos tanto no ar como no vidro. Portanto, $f_{\text{ar}} = f_{\text{vidro}}$ e daí $\frac{\lambda_{\text{ar}}}{\lambda_{\text{vidro}}} = \frac{v_{\text{ar}}}{v_{\text{vidro}}} = 1,5$ e então $\lambda_{\text{ar}} = 1,5\times333\ nm = 500\ nm$.

c) O ângulo crítico da refracção é definido na figura a seguir:



$\frac{\sin(i_c)}{\sin(r=90°)} = \frac{v_{\text{vidro}}}{v_{\text{ar}}} = \frac{1}{1,5}$ e então $i_c = 41,8°$.

2.17 O ângulo de incedência é igual a 10° e o ângulo de refracção é aproximadamente 6°. Ambos estes ângulos são pequenos. Portanto, para a diferença entre os dois ângulos de refracção , r_1 e r_2, que são quase iguais, podemos escrever
$r_1 - r_2 \approx \sin(r_1 - r_2) = \sin(r_1)\cos(r_2) - \sin(r_2)\cos(r_1) \approx \sin(r_1) - \sin(r_2) = \sin(i)\times\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)$
$= \sin(i)\times\left(\frac{n_1 - n_2}{n^2}\right) = \sin(10°)\times\frac{0,0097}{1,59^2} = 6,663\times10^{-4}$.

2.18 $d\sin(\theta) = \lambda$

a) $\sin(\theta) = 0,01$ e $\lambda = 0,589 \times 10^{-6}\ m$. Portanto, $d = 100 \times \lambda = 58,9\ \mu m$.

b) $d = 58,9\ \mu m$ e $\lambda = 0,650 \times 10^{-6}\ m$. Portanto, $\sin(\theta) = 0,011$.

2.19 $\frac{1}{d} = \frac{6000}{1,0 \times 10^{-2}\ m} = 6,0 \times 10^{-2}\ m^{-1}$ e $\lambda = 0,500 \times 10^{-6}\ m$. Portanto, $\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{d} = m \times (0,500 \times 10^{-6}\ m) \times (6,0 \times 10^{-2}\ m^{-1}) = 0,3 \times m$.

m	$\sin(\theta)$	θ
1	$0,3$	$17,5°$
2	$0,6$	$36,9°$
3	$0,9$	$64,2°$
4	> 1	não possível

2.21 $\frac{1}{d} = \frac{4000}{1,0 \times 10^{-2}\ m} = 4,0 \times 10^{5}\ m^{-1}$, $\sin(\theta) = m\frac{\lambda}{d} = m \times (4,0 \times 10^{5}\ m^{-1}) \times \lambda$.

m	θ $(400\ nm)$	θ $(700\ nm)$
1	$9,2°$	$16,2°$
2	$18,7°$	$34,1°$
3	$28,7°$	$57,1°$

2.22 O *poder de resolução* da rede é a medida da capacidade de separação de duas cores e é dado pelo critério de Rayleigh: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm}$, onde λ e $\lambda + \Delta\lambda$ representam os comprimentos de onda das duas cores, N o número de fendas e m a ordem do máximo.
$\Delta\lambda = 0,59\ nm$ e $\lambda = 589\ nm$, portanto $Nm = 1000$. Para o primeiro máximo ($m = 1$) são precisas 1000 fendas, para o segundo ($m = 2$) apenas 500.

3 Os problemas do capítulo 3

3.1 Seja o eixo dos zz na vertical e o eixo dos xx na horizontal. Os dois componentes do vector posição de um objecto em queda livre em função do tempo, t, são então dados por
$x(t) = x_0 + v_0 \cos(\alpha)t$ e $z(t) = z_0 + v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$, onde (x_0, z_0), v_0, α e g representam respectivamente os dois componentes da vector posição no instante $t = 0$, o modulo da velocidade inicial, o ângulo com a horizontal da velocidade inicial e a aceleração gravítica. Os dois componentes da velocidade em função do tempo, t, são dados por $\dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha)$ e $\dot{z}(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt$.
Suponhamos que a superfície da Terra coincide com o plano $z = 0$ e que o objecto inicia a sua queda livre (salto) no instante $t = 0$ e na origem das coordenadas, *i.e.* $x_0 = z_0 = 0$.

O componente vertical da velocidade do objecto anula-se no ponto da máxima altura do objecto. Suponha que o objecto passa neste ponto no instante t_m, *i.e.*
$0 = \dot{z}(t_m) = v_0 \sin(\alpha) - g t_m$, ou seja $t_m = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$.
Em função do ângulo α o tempo de demora, t_m, é máximo para $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
O salto termina no instante $2 \times t_m$ quando o objecto volta na superfície da Terra. O alcance horizontal é portanto dado por
$x(2t_m) = v_0 \cos(\alpha) 2t_m = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$.
Em função do ângulo α isto é máximo para $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

a) Para um alcance horizontal máximo a rã saltará com um ângulo ínicial de $\frac{\pi}{4}$.

b) Da fórmula $t_m = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$ podemos concluir que o tempo de voo, $2t_m$, é maior se o ângulo ínicial é maior.

c) Da fórmula $x(2t_m) = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ tiramos $v_0^2 = \frac{x(2t_m)\, g}{\sin(2\alpha)} = \frac{(0,8\ m) \times (9,8\ ms^{-2})}{\sin(55°)} = 9,57\ (m/s)^2$, ou seja $v_0 = 3,12\ m/s$.

3.2

Dividimos o salto vertical em duas partes. A primeira parte é para acelerar. Os músculos do corpo dão uma tal força que em média resulta uma aceleração positiva: $a_e = a_{\text{músculos}} - g$. A velocidade inicial é zero e escolhemos a origem do sistema das coordenadas no chão. Para esta parte do movimento temos então: $\dot{z}(t) = a_e t$ e $z(t) = \frac{1}{2} a_e t^2$. Substituindo $\dot{z}$ na segunda expressão, obtemos a fórmula $z(t) = \frac{1}{2} \frac{(\dot{z}(t))^2}{a_e}$, ou seja $\dot{z}(t) = \sqrt{2 a_e z(t)}$.
Esta parte do movimento acaba quando os pés se soltam do chão. A altura em que isto acontece é representada por d. No correspondente instante temos $\dot{z} = \sqrt{2 a_e d}$.
Na segunda parte do salto o corpo está em queda livre com velocidade inicial igual ao resultado final da primeira parte do salto, *i.e.* $v_0 = \sqrt{2 a_e d}$. Voltamos a escolher nova origem do sistema das coordenadas, esta vez no ponto inicial da segunda parte do salto. O movimento é neste caso descrito por: $\dot{z}(t) = v_0 - g t$ e $z(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$.
No instante, t_m, em que o corpo atinge a altura máxima, h, a velocidade é igual a zero, ou seja $0 = v_0 - g t_m$. Substituindo $t_m = \frac{v_0}{g}$ na segunda expressão, obtemos a fórmula $h = z(t_m) = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{(v_0)^2}{g}$, ou seja $v_0 = \sqrt{2gh}$.
Combinando o resultado da primeira parte do movimento, $v_0 = \sqrt{2 a_e d}$, com o último resultado, obtemos $a_e d = gh$, ou seja $a_e = \frac{gh}{d}$.

a) Com $d = 0,5\ m$, $h = 1\ m$ e $g = 9,8\ ms^{-2}$, obtem-se $a_e = 19,6\ ms^{-2}$. Repare que $a_{\text{músculos}} = a_e + g = 29,4\ ms^{-2}$, o que para uma pessoa de 70 kg corresponde a uma força de 2058 N, ou seja uma força de levantar 210 kg.

b) Para a mosca $d = 8 \times 10^{-4}\ m$ e $h = 0,1\ m$, então $a_e = 1225\ ms^{-2}$. Se a_e era igual para o homen ($d_{\text{homen}} = 0,5\ m$), então conseguia saltar até uma altura de $h = \frac{a_e d}{g} = 62,5\ m$.

3.3 Energia = Força × Deslocamento. Os músculos trabalham na primeira parte de um salto. A força média é igual a 2058 N e o deslocamento a 0,5 m, então a energia é igual a 1029 J.

3.4 A bola ressalta da parede com velocidade horizontal v_0, a altura inicial é igual a $z_0 = 2\ m$. O ângulo da velocidade inicial, α, é igual a zero. Tomamos a origem do sistema das coordenadas no chão por baixo da parede, então $x_0 = 0$. O movimento é neste caso descrito por

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ 2 - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} \quad .$$

A bola cai no chão no instante t_c. Neste instante temos $4 = x\left(t_c\right) = v_0 t_c$ e $0 = z\left(t_c\right) = 2 - \frac{1}{2} g \left(t_c\right)^2$.
Estas relações resultam em $v_0 = \sqrt{(4\ m) \times g} = 6,3\ ms^{-1}$.
A energia cinética inicial é igual a $E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}\left(0,1\ kg\right) \times \left(10\ ms^{-1}\right)^2 = 5\ J$.
A energia cinética depois do choque com a parede é igual a
$E_{\text{final}} = \frac{1}{2}\left(0,1\ kg\right) \times \left(v_0\right)^2 = 0,05 \times (4\ m) \times g$.
A perda da energia cinética é igual à diferença dada por: $E_{\text{inicial}} - E_{\text{final}} = 5 - 0,05 \times (4\ m) \times g$.

a) Toma g_{Terra}.

b) Toma g_{Lua}.

3.6 Num choque de dois objectos suponhamos que durante um certo intervalo de tempo, Δt, há interacção entre os objectos. Seja, F, a força média que os objectos exerçam um sobre o outro durante este intervalo de tempo. Então o impulso médio é dado por $F\Delta t$.
Se um dos objectos tiver um momento linear p_1 antes do choque, então depois do choque fica com momento linear $p_1' = p_1 + F\Delta t$. A força sobre o outro objecto tem sentido oposto, *i.e.* $-F$ (Reacção $= -$ Acção). Consequentemente, se o outro objecto tiver momento linear p_2 antes do choque, então depois do choque fica com momento linear $p_2' = p_2 - F\Delta t$.
Assim obtém-se $p_1' + p_2' = p_1 + p_2$, ou seja, conservação do momento linear total num choque.
Normalmente não são conhecidos, nem a duração do intervalo do tempo da interacção , nem a força média, mas temos sempre a informação que o momento linear total é conservado caso os objectos são livres antes e depois do choque.
Neste problema são dadas as massas dos objectos, $m_1 = 1,67 \times 10^{-27}\ kg$ e $m_2 = 23,0 \times 10^{-27}\ kg$, e as velocidades iniciais, $v_1 = 2,700 \times 10^3\ ms^{-1}$ e $v_2 = 0$.
Sobre a situação final somos informados que as velocidades finais são iguais $v_1' = v_2' = v$.
Da conservação do momento linear temos então:
$4,509 \times 10^{-24}\ kgms^{-1} = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' = \left(m_1 + m_2\right) v = \left(24,67 \times 10^{-27}\ kg\right) \times v$.
O que é resolvido por $v = 0,183 \times 10^3\ ms^{-1}$.

3.13

Tomamos como a origem do sistema das coordenadas o centro (centro de massa) da Terra e consideramos os objectos que se encontram a distâncias da origem superiores ao raio da Terra.
A energia potencial gravítica de um objecto cuja posição é representado pelo vector $\vec{r}$, é dada por $U_g\left(\vec{r}\ \right) = -G\frac{Mm}{r}$, onde G representa a constante de gravitação , M a massa da Terra, m a massa do objecto e r o modulo do vector posição do objecto.

A energia cinética do objecto é dada por $T = \frac{1}{2}m\dot{r} = \frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta)\right\}$, onde ϑ e φ representam os ângulos polar e azimutal das coordenadas esfericas respectivamente (veja também os meus apontamentos sobre *a conservação do Momento Angular em três dimensões*).
A função de Lagrange, para um objecto que se move no campo gravítico da Terra, é dada por

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta)\right) + G\frac{Mm}{r} \quad .$$

A seguir determinaremos as equações do movimento a partir das equações de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned}
-G\frac{Mm}{r^2} + mr\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2(\vartheta)\right) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}} = \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right)\\
mr^2\dot{\varphi}^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vartheta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\vartheta}\right)\\
0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\sin^2(\vartheta)\right)
\end{aligned}$$

O movimento do objecto ocorre num plano que passa na origem. Sem perder a generalidade, podemos escolher para este plano o plano dado por $\vartheta = \pi/2$. Assim temos $\dot{\vartheta} = 0$, $\sin(\vartheta) = 1$ e $\cos(\vartheta) = 0$ e ficamos com as seguintes equações

$$\begin{aligned}
-G\frac{Mm}{r^2} + mr\dot{\varphi}^2 &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}\right)\\
0 &= \frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\varphi}\right)
\end{aligned}$$

A conservação do momento angular, $mr^2\dot{\varphi}$, exprime-se na segunda equação . Para uma órbita circular temos $\dot{r} = 0$. Neste caso obtemos da primeira equação : $-G\frac{Mm}{r^2} + mr\dot{\varphi}^2 = 0$, ou seja $r^3\dot{\varphi}^2 = GM$, a famosa fórmula de Keppler.

a) Agora, a relação entre a velocidade linear, v, a velocidade angular, $\dot{\varphi}$, e o raio, r, duma órbita circular de um satélite é dada por $v = r\dot{\varphi}$. Ficamos com a equação $-G\frac{Mm}{r^2} + m\frac{v^2}{r} = 0$. O primeiro termo desta equação é a força gravítica e o segundo a força centripeta. Podemos então concluir que para órbitas circulares a força centripeta é igual a força gravítica. Obtemos $v^2 = G\frac{M}{r}$. Caso que se escreve mg_r para a força gravítica, com $g_r = GM/r^2$, obtem-se $v^2 = rg_r$.

b) Para a Terra $GM = 3,99 \times 10^{14}\ m^3s^{-2}$. A velocidade angular do satélite é igual a $\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{23\ h\ \text{e}\ 56\ min} = 7,29 \times 10^{-5}\ rad/s$. Então $r^3 = \frac{3,99 \times 10^{14}\ m^3s^{-2}}{\left(0,729 \times 10^{-4}\ rad/s\right)^2} = 75,1 \times 10^{21}\ m^3$. Daí $r = 4,22 \times 10^7\ m$.

3.14

$$U(r) = \int_r^\infty \left(-G\frac{Mm}{\mathrm{r}^2}\right)\vec{e}_\mathrm{r}\cdot d\vec{\mathrm{r}} = -\int_r^\infty d\mathrm{r}G\frac{Mm}{\mathrm{r}^2} = G\frac{Mm}{\mathrm{r}\to\infty} - G\frac{Mm}{\mathrm{r}=r} = -G\frac{Mm}{r} \quad .$$

a) Para pequenas distâncias, h, acima da superfície da Terra escrevemos $r = R + h = R\left(1 + \frac{h}{R}\right)$, onde R representa o raio da Terra. Assim obtemos $U(r) = -G\frac{Mm}{R\left(1+\frac{h}{R}\right)} \approx -G\frac{Mm}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right) = -G\frac{Mm}{R} + G\frac{Mm}{R^2}h$. A primeira parte desta expressão é uma constante que não tem interesse, dado ao facto que em geral estamos interessados em diferenças do potencial entre dois pontos de alturas diferentes. Assim podemos definir para o potencial relativamente á superfície da Terra, $\bar{U}(r = R + h) = G\frac{Mm}{R^2}h$. A aceleração gravítica é dada por $g = G\frac{M}{R^2}$. Obtemos então $\bar{U}(h) = mgh$.

b) O potencial gravítico relativamente á superfície da Terra exacto:

$$\bar{U}(r = R + h) = \int_r^R \left(-G\frac{Mm}{\mathrm{r}^2}\right)\vec{e}_\mathrm{r} \cdot d\vec{\mathrm{r}} = G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{r} = G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{R+h} \quad .$$

Isto podemos escrever na forma $\bar{U}(h) = mG\frac{M}{R^2}\left(R - \frac{R^2}{R+h}\right) = mg\left(R - \frac{R^2}{R+h}\right)$
A diferença entre a expressão exacta e a expressão aproximada é igual a $mg\left(R - \frac{R^2}{R+h} - h\right) = -mg\frac{h^2}{R+h} \approx -mg\frac{h^2}{R}\left(1 - \frac{h}{R}\right)$.
Um altitude de 60 km é pequeno comparado com o raio da Terra, 6378 km. Por isso aproximadamente temos para a diferença em causa $-mg\frac{h^2}{R} = -mgh \times \frac{h}{R} = -0,94 \times 10^{-2}mgh$.

3.15 O momento angular é dado por $L = mr^2\dot{\varphi}$. A relação entre a velocidade linear, v, a velocidade angular, $\dot{\varphi}$, e o raio, r, duma órbita circular do electrão é dada por $v = r\dot{\varphi}$. Portanto $L = mrv$. Daí $v = \frac{L}{mr} = \frac{1,055 \times 10^{-34}\ kgm^2/s}{(9,11 \times 10^{-31}\ kg) \times (5,29 \times 10^{-11}\ m)} = 2,19 \times 10^6\ m/s = 0,0073c$.

3.20 Faltam dados sobre o planeta Diemos! Tomamos por agora o seguinte valor para o raio deste planeta: $R_D = 4,08\ km$. A massa do planeta Diemos temos que determinar a partir do planeta Marte. É dado que Diemos tem a mesma densidade média que Marte. Neste caso temos para planetas esféricos $\frac{M_D}{\frac{4}{3}\pi R_D^3} = \rho_D = \rho_M = \frac{M_M}{\frac{4}{3}\pi R_M^3}$, ou seja $\frac{M_D}{R_D^3} = \frac{M_M}{R_M^3}$. Daí $M_D = M_M\frac{R_D^3}{R_M^3} = (6,42 \times 10^{23}\ kg)\frac{(4,08 \times 10^3\ m)^3}{(3,37 \times 10^6\ m)^3} = 1,137 \times 10^{15}\ kg$.
Um objecto em repouso a uma distância grande (infinito) de um planeta não tem energia cinética, nem energia potencial gravítica. A sua energia total é neste caso igual a zero. Consequentemente, um objecto pode escapar de um planeta se a sua energia total é minimamente igual à energia total ao infinito, ou seja zero. A energia total a uma distância r do centro do planeta superior ao raio R do planeta é dado por $E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}$. Caso $E = 0$ temos $v^2 = \frac{2GM}{r}$. Se esta velocidade aponta radialmente para fora, o objecto pode escapar. À superfície do planeta defina-se a velocidade mínima para libertar-se da influência da atracção do planeta por velocidade de escape, v_e. Assim $v_e^2 = \frac{2GM}{R}$. Para Diemos esta velocidade é igual a $v_e = \sqrt{\frac{2GM_D}{R_D}} = \sqrt{\frac{2 \times (6,6726 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}) \times (1,137 \times 10^{15}\ kg)}{4,08 \times 10^3\ m}} = 6,1\ m/s$.
Concluimos em problema 3.2 que os músculos do astronauta que consegue dar saltos de 1 m de

altura à superfície da Terra, fornecam uma força correspondente a $3g_{\text{Terra}} = 29,4\ ms^{-2}$ sobre uma distância (esticar as pernas) de $d = 0,5\ m$.

a) A aceleração gravítica, g_D, à superfície do planeta Diemos é dada por $g_D = G\frac{M_D}{R_D^2} = 0,00456\ ms^{-2}$. Então, no planeta Diemos o astronauta consegue uma aceleração efectiva dada por $a_e = 29,4 - 0,00456 = 29,4\ ms^{-2}$ e portanto uma velocidade inicial de $\sqrt{2a_e d} = 5,42\ ms^{-1}$, o que não chega para escapar do planeta.

b) Para conseguir uma velocidade de $6,1\ m/s$ o astronauta precisa uma aceleração a_e assim que $\sqrt{2a_e d} = 6,1\ ms^{-1}$, ou seja $a_e = 37,2\ ms^{-2}$. Na Terra isto corresponde a uma aceleração efectiva de $37,2 - 9,8 = 27,4\ ms^{-2}$ e uma velocidade inicial de $\sqrt{2 \times (27,4\ ms^{-2}) \times (0,5\ m)} = 5,2\ m/s$. Na segunda parte do salto na Terra atinge então uma altura de $\frac{1}{2}\frac{(5,2\ m/s)^2}{9,8\ ms^{-2}} = 1,4\ m$.

3.22 A diferença da energia total, entre a situação em que o objecto se encontra sem velocidade na posição A e a situação em que o objecto se encontra sem velocidade na posição B, é igual à diferença da energia gravítica nestas posições , ou seja $mg\ell \sin(3^\circ) = (0,5\ kg) \times (9,8\ ms^{-2}) \times (1,0\ m) \times 0,0523 = 0,256\ Nm$.

a) O trabalho realizado pela força de atrito quando o pêndulo vai de A para B é igual a

$$W = -0,256\ Nm \quad .$$

b) Trabalho = Força × Deslocamento.
O deslocamento é igual ao Raio × Ângulo. O ângulo é igual a $177 \times \frac{2\pi}{360} = 3,089\ rad$. O deslocamento é, então, igual a $(1,0\ m) \times 3,089 = 3,089\ m$.
Daí a força do atrito em média, é igual a $\frac{-0,256\ Nm}{3,089\ m} = 0,083\ N$.

c) O deslocamento a seguir é dado por $(1,0\ m) \times (\pi - \alpha - \beta)$. Consequentemente, o trabalho de atrito é nesta fase do movimento dado por $-(0,083\ N) \times (\pi - \alpha - \beta)$.
A diferença da energia total é neste caso igual a
$mg\ell \sin(\alpha) - mg\ell \sin(\beta) \approx mg\ell \times (\alpha - \beta)$.
A equação para resolver é portanto $4,9 \times (\alpha - \beta) = -0,083 \times (\pi - \alpha - \beta)$, ou seja
$4,9 \times (3^\circ - \beta) = -0,083 \times (177^\circ - \beta)$, de que resulta $\beta = 5,95^\circ$.

3.23 Estudamos a seguinte equação diferencial de um objecto que se desloca ao longo do vertical (eixo dos zz)

$$m\ddot{z} = A - B\dot{z} \quad .$$

Experimentamos uma solução da forma $\dot{z}(t) = v_{lim}(1 - e^{-\alpha t})$ para a velocidade do objecto.
Daí, $\ddot{z}(t) = v_{lim}\alpha e^{-\alpha t}$. Substituir na equação diferencial

$$mv_{lim}\alpha e^{-\alpha t} = A - Bv_{lim}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) \quad .$$

Portanto $mv_{lim}\alpha = Bv_{lim}$ e $0 = A - Bv_{lim}$, ou seja $m\alpha = B$ e $A = Bv_{lim}$.
No limite $t \to \infty$ obtemos para a velocidade $\dot{z}(t \to \infty) = v_{lim}$.

Para a bolha de ar temos as seguintes forças:
A força da gravidade: $-mg = -\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{ar}} g$,
O impulso da água (Arquimedes): $V\rho_{\text{água}} g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{água}} g$,
A força do atrito: $-6\pi R\eta\dot{z}$.

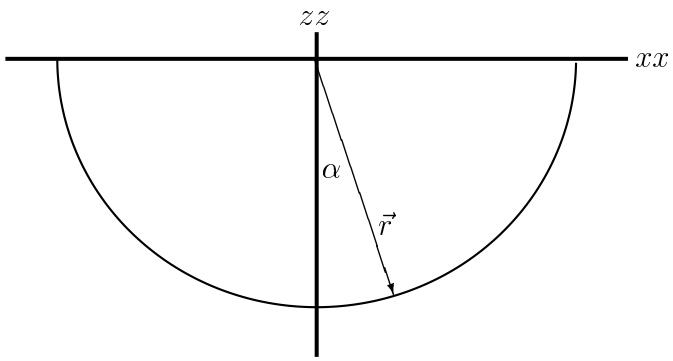
A equação do movimento da bolha obtemos então pelas seguintes substituições na equação diferencial acima definida: $A = \frac{4}{3}\pi R^3 \left(\rho_{\text{água}} - \rho_{\text{ar}}\right) g$ e $B = 6\pi R\eta$.

a) A velocidade limite é dada por
$v_{lim} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3 \left(\rho_{\text{água}} - \rho_{\text{ar}}\right) g}{6\pi R\eta} = \dfrac{2g}{9\eta}\left(\rho_{\text{água}} - \rho_{\text{ar}}\right) R^2 \approx \dfrac{2g}{9\eta}\rho_{\text{água}} R^2$.
Para $g = 9,8\ ms^{-2}$, $\eta = 0,1\ Nm^{-2}s$, $\rho_{\text{água}} = 1,0 \times 10^3\ kgm^{-3}$ e $R = 1,0 \times 10^{-3}\ m$ obtem-se
$v_{lim} = 2,2 \times 10^{-2}\ ms^{-1}$.

b) A velocidade limite é proporcional com R^2.

3.24 A energia elástica armanezada na mola comprimida é igual a $U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$. Com os dados do livro obtem-se $U(0,1\ m) = 0,5\ Nm$. Na posição do equilíbrio $U(0) = 0$, os objectos têm velocidade máxima. É nesta posição que os objectos se separam. As massas somam em $1\ kg$ e as suas energias cinéticas em $T = 0,5v^2$.
Pela conservação da energia temos $0,5v^2 = T = U(0,1\ m) = 0,5\ Nm$, ou seja $v = 1\ ms^{-1}$.

3.32



Na figura mostra-se a nossa escolha do sistema das coordenadas e a origem relativamente á superfície do copo. O vector posição do objecto é indicado por $\vec{r}$ e o ângulo deste vector com a parte negativa do eixo dos zz por α. Se o raio da curvatura da superfície esférica é representado por R, temos

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin(\alpha(t)) \\ -R\cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \text{ e } \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\dot{\alpha}(t)\cos(\alpha(t)) \\ R\dot{\alpha}(t)\sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}.$$

A energia cinética do objecto é dada por $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2$ e a sua energia potencial gravítica por $U = mgz = -mgR\cos(\alpha)$.

a) Se o objecto foi largado sem velocidade inicial (*i.e.* $\dot{\vec{r}}(0) = 0$) no bordo do copo (*i.e.* $z = 0$), então

a sua energia total, $E = T + U$, é zero. No fundo do copo (*i.e.* $\alpha = 0$ e $z = -R$) a energia potencial gravítica é igual a $U = -mgR$ e é mínima. Pela conservação da energia total temos portanto que a energia cinética do objecto, quando passa pelo ponto mais fundo do copo, é igual a $T = mgR$ e é máxima. Consequentemente, obtem-se nesta situação $\frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2 = T = mgR$, ou seja $\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$. Substituindo $g = 9,8\ ms^{-2}$ e $R = 0,03\ m$, encontramos $\dot{\alpha} = 25,6\ rad/s$ e a partir daí a velocidade linear $v = R\dot{\alpha} = 0,77\ m/s$.

b) A função de Lagrange é dada por $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2 + mgR\cos(\alpha)$. A equação do movimento que surge deste Lagrangeano é a seguinte: $mR^2\ddot{\alpha} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -mgR\sin(\alpha)$.
Para pequenas oscilações junto do fundo do copo temos $|\alpha| \ll 1$ e portanto podemos aproximar $\sin(\alpha)$ a α. Fica a equação diferencial $R\ddot{\alpha} = -g\alpha$. Uma equação destas é resolvida por $\alpha(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, onde A representa a amplitude da oscilação que necessariamente é pequena, ω a frequência angular da oscilação e ϕ uma fase inicial qualquer.
Da equação diferencial temos $-R\omega^2 = -g$. O período da oscilação é dada por $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 0,35$ *s*.

c) Para pequenas oscilações de uma mola horizontal (eixo dos xx) sem fricções temos a seguinte função de Lagrange: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$.
A equação do movimento que surge deste Lagrangeano é a seguinte: $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -Kx$.
Uma equação destas é resolvida por $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, onde A representa a amplitude da oscilação que necessariamente é pequena, ω a frequência angular da oscilação e ϕ uma fase inicial qualquer.
Da equação diferencial temos $-m\omega^2 = -K$. O período da oscilação é dada por $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0,35$ *s*. Daí tira-se o valor de K.

d) O período da oscilação é dada por $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. Portanto, R inferior implica periodo inferior e consequentemente uma frequência angular superior.

4 Os problemas do capítulo 4

4.1 A situação , depois do elevador e o passageiro entrarem em queda livre, é a seguinte:
1. Altura do passageiro do elevador em queda livre, relativamente a um ponto qualquer da vertical (eixo dos zz):

$z_p(t) = h_{0,p} + v_{0,p}t - \frac{1}{2}gt^2$

2. Altura da moeda em queda livre:

$z_m(t) = h_{0,m} + v_{0,m}t - \frac{1}{2}gt^2$

3. Altura da pessoa à espera do elevador no primeiro andar:

$z_e(t) = h_{0,e}$

Tomamos $t = 0$ *segundos* o instante em que os cabos do elevador se partem.
As velocidades no instante $t = 0$ *segundos* são dadas por

$\dot{z}_p(0) = v_{0,p} = 0\ m/s$, $\dot{z}_m(0) = v_{0,m} = -1\ m/s$ e $\dot{z}_e(0) = 0\ m/s$.

a) O movimento da moeda relativamente ao passageiro do elevador em queda livre é, então, dado por:

$z_m(t) - z_p(t) = h_{0,m} - h_{0,p} - 1 \times t$,

o que representa um movimento uniforme com velocidade constante de $-1\ m/s$.

O movimento da moeda relativamente à pessoa à espera do elevador no primeiro andar é dado por:

$z_m(t) - z_e(t) = h_{0,m} - h_{0,e} - 1 \times t - \frac{1}{2}gt^2$,

o que representa um movimento uniformemente acelerado com velocidade inicial de $-1\ m/s$ e aceleração $-g$.

4.3

a) $\ell = \ell_0\sqrt{1-\beta^2}$ e $\ell = 0,5 \times \ell_0$, então $\sqrt{1-\beta^2} = 0,5$ ou seja $\beta^2 = 0,75$.
Portanto, $v = \beta c = \sqrt{0,75}c = 2,6 \times 10^8\ m/s$.

b) Os tripulantes estão em repouso relativamente à nave, portanto, para eles a nave tem 20 *metros* de comprimento.

4.4

$\beta = \frac{v}{c} = \frac{30\ km/s}{3,0 \times 10^5\ km/s} = 10^{-4}$,
ou seja, numa aproximação para $\beta^2 \ll 1$, $\sqrt{1-\beta^2} \approx 1 - 0,5\beta^2 = 1 - 0,5 \times 10^{-8}$.
A contracção do diâmetro da Terra, d, para um astronauta em repouso relativamente ao Sol, é então dada por

$d = d_0\sqrt{1-\beta^2} \approx d_0\,(1 - 0,5 \times 10^{-8})$, ou seja $d_0 - d \approx d_0 \times 0,5 \times 10^{-8} = 6,37 \times 10^{-2}\ m$.

4.5

$\beta = 0,995$.
Portanto, numa aproximação , $\beta^2 = (1 - 5 \times 10^{-3})^2 \approx 1 - 2 \times (5 \times 10^{-3}) = 1 - 10^{-2}$.
Consequentemente, $\sqrt{1-\beta^2} \approx \sqrt{10^{-2}} = 0,1$. Obtem-se então

$4,19 \times 10^{-12}\ s = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 10\Delta t'$ e $\Delta t' \approx 4,2 \times 10^{-13}\ s$.

4.6

a) $\beta = 0,960$, portanto $\sqrt{1-\beta^2} = 0,280$ e $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1,00 \times 10^{-7}\ s}{0,280} = 3,57 \times 10^{-7}\ s$.

b) $\ell_0 = v\Delta t = 0,96 \times (3,00 \times 10^8\ m/s) \times (3,57 \times 10^{-7}\ s) = 103\ m$.

c) $\ell = v\Delta t' = 0,96 \times (3,00 \times 10^8\ m/s) \times (1,00 \times 10^{-7}\ s) = 28,8\ m$.

4.7

a) $0,01N_0 = N(t) = N_0e^{-\lambda t}$, onde λ é dado por $0,5N_0 = N_0e^{-\lambda T_{1/2}}$.

Portanto, $t = \frac{-\log(0,01)}{\lambda} = \frac{\log(100)}{\log(2)}T_{1/2} = 4,38 \times 10^3\ s = 73\ minutos$.

b) Um neutrão demoraria a chegar à Terra, um intervalo de tempo, Δt, dado por
$\Delta t = \frac{\text{distância Sol-Terra}}{\text{velocidade}} = \frac{1,49 \times 10^{11}\ m}{10^6\ m/s} 1,49 \times 10^5\ segundos = 2,48 \times 10^3\ minutos.$

c) Considere os intervalos de tempo Δt e $\Delta t'$, que representam o mesmo intervalo do tempo no relógio interno do neutrão, respectivamente medidos no referencial da Terra e no referencial próprio do neutrão.
$\beta = \frac{10^6\ m/s}{c} = 0,33 \times 10^{-2}$ e portanto $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) \Delta t' = (1 + 0.56 \times 10^{-5})\, \Delta t'$.
Consequentemente, a dilatação do período de semi-vida do neutrão no seu referencial próprio, medido no referencial da Terra, não é significante, *i.e.* $\Delta t \approx \Delta t'$. No entanto, um intervalo do tempo de $2,48 \times 10^3\ minutos$ representa 34 vezes 73 *minutos* e portanto uma redução da intensidade do feixe de um factor $(0,01)^{34} = 10^{-68}$.

Isto, porque $N\,(2,48 \times 10^3\ minutos) = N_0 \exp(-\lambda 2,48 \times 10^3\ minutos)$
$= N_0 \exp(-\lambda 34 \times 73\ minutos) = N_0\,[\exp(-\lambda \times 73\ minutos)]^{34} = N_0\,[0,01]^{34}$.

Mesmo se toda a massa do Sol ($2 \times 10^{30}\ kg$) se convertesse em neutrões ($1,2 \times 10^{58}$ neutrões), todos dirigidos para a Terra, chegariam à Terra 10^{-10} neutrões, ou seja zero.

4.8 a) No referencial dos passageiros a nave está parada e a luz tem velocidade c. Portanto, a diferença de percurso entre o raio (1) e o raio (2) é igual ao dobro do comprimento da nave para os passageiros da nave.
No referencial dum observador na Terra a nave tem velocidade V e a luz tem velocidade c. Seja Δx a diferença de percurso entre o raio (1) e o raio (2) e Δt a diferença em tempo da chegada entre o sinal (1) e o sinal (2), então $\Delta x = c\Delta t$. Seja ainda ℓ o comprimento da nave no referencial do observador na Terra, então $\Delta x = 2\ell + V\Delta t$.

b) Sabemos ainda a relação entre ℓ, a distância dos dois espelhos no referencial do observador na Terra, e ℓ_0, a distância dos dois espelhos no referencial dos passageiros da nave, *i.e.*

$\ell = \ell_0\sqrt{1-\beta^2}$ com $\beta = \frac{V}{c}$.

Chegamos então a $c\Delta t = \Delta x = 2\ell_0\sqrt{1-\beta^2} + c\beta\Delta t$.

Ou seja

$$(1-\beta)^2 = \left(\frac{2\ell_0}{c\Delta t}\right)^2 (1-\beta^2).$$

$$\text{O que é resolvido por } \beta = \frac{1 - \left(\frac{2\ell_0}{c\Delta t}\right)^2}{1 + \left(\frac{2\ell_0}{c\Delta t}\right)^2}$$

Agora: $\frac{2\ell_0}{c\Delta t} = \frac{2 \times 60\ m}{(3,0 \times 10^8\ m/s) \times (1,74 \times 10^{-6}\ s)} = 0,23$, portanto $\beta = \frac{1 - 0,23^2}{1 + 0,23^2} = 0,90$ ou seja $V = \beta c = 2,7 \times 10^8\ m/s$.

c) Suponha que os mesões deslocam-se na mesma direcção e sentido que a nave. Neste caso

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} = c\frac{\frac{v'}{c} + \frac{V}{c}}{1 + \frac{v'}{c}\frac{V}{c}} = c\frac{0,999 + 0,90}{1 + 0,999 \times 0,9} = 0,9999c.$$

d) Classicamente somava-se as velocidades, o que dá um valor superior à velocidade da luz. Sabemos agora que os mesões por causa da sua massa nem podem atingir a velocidade da luz.

4.10 Tomamos a origem do eixo dos xx coincidente com uma das duas lâmpadas. A outra encontra-se então na posição $x = 10\ m$. Suponha que as lâmpadas são ligadas simultaneamente no instante $t = 0$. Para o passageiro do avião em movimento, cuja origem coincidiu no instante $t = 0$ com a origem do observador parado e cujo relógio indicou $t' = 0$ no instante da coincidência das origens, estes eventos não são simultaneos.

a) O evento de ligar a lâmpada na origem indicamos por $(x_1, ct_1) = (0, 0)$ e evento de ligar a outra lâmpada por $(x_2, ct_2) = (10\ m, 0)$. Para o passageiro do avião estes eventos são respectivamente indicados por (x'_1, ct'_1) e (x'_2, ct'_2). Das transformações de Lorentz temos as seguintes relações ($\beta = 2 \times 10^{-6}$:

$ct'_1 = \frac{ct_1 - \beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$, e

$ct'_2 = \frac{ct_2 - \beta x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{-\beta\,(10\ m)}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx -\beta\,(10\ m) = -2 \times 10^{-5}\ m$ ou seja $t'_2 = \frac{-2 \times 10^{-5}\ m}{3,0 \times 10^8\ m/s} = -6,7 \times 10^{-14}\ s$.

De acordo com o passageiro do avião ligaram a lâmpada (2) 0,067 *picosegundos* antes da lâmpada (1).

b) A distância espacial entre as lâmpadas:

$x'_1 = \frac{x_1 - \beta c t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$, e

$x'_2 = \frac{x_2 - \beta c t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx x_2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) = x_2\,(1 + 2 \times 10^{-12}) = (10 + 2 \times 10^{-11})\ m = 10\ m\ +$ 0,2 Angström.

4.12 $1\ GeV = 10^9\ eV = 1,6 \times 10^{-10}\ J$.
O momento linear de um electrão é dado por $pc = 100\ GeV$.
A massa de um electrão é dada por
$mc^2 = (9,1 \times 10^{-31}\ kg) \times (3,0 \times 10^8\ ms^{-1})^2 = 8,2 \times 10^{-14}\ J = 0,51 \times 10^{-3}\ GeV$.

a) $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$.
Portanto, $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} = \frac{(pc)^2}{E^2}$.
Ainda, $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 = (100\ GeV)^2 + (0,51 \times 10^{-3}\ GeV)^2 = (100\ GeV)^2 \times (1 + 0,26 \times 10^{-10})$
Daí, $\beta^2 \approx \frac{(100\ GeV)^2}{(100\ GeV)^2 \times (1 + 0,26 \times 10^{-10})} \approx 1 - 0,26 \times 10^{-10}$,
$\beta \approx \sqrt{1 + 0,26 \times 10^{-10}} \approx 1 + 0,13 \times 10^{-10}$ e $E = 100\ GeV$.

b) Classicamente $E_{\text{clássica}} = \frac{1}{2}mv^2 \approx \frac{1}{2}mc^2 = 0,26 \times 10^{-3}\ GeV$.
Portanto, $\frac{E - mc^2}{E_{\text{clássica}}} = 4 \times 10^5$.

4.13 $\beta = 0,99 = 1 - 0,01$, portanto $\beta^2 \approx 1 - 0,02$ e $\sqrt{1-\beta^2} \approx \sqrt{0,02} = 0,14$.
A energia de um electrão, animado com uma velocidade de 0,99c, é dada por $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \frac{0,51 \times 10^{-3}\ GeV}{0,14} = 3,6 \times 10^{-3}\ GeV$.

a) A energia minima para criar um protão (*i.e.* caso o protão esteja em repouso) é igual a $0,94\ GeV$. Então o electrão não tem energia para produzir um protão.

b) Cada um dos fotões tem energia igual a $3,6 \times 10^{-3}\ GeV$.

c) A massa inicial é igual a duas vezes a massa do electrão, ou seja $2 \times 0,51 \times 10^{-3}\ GeV$. A massa final é igual a duas vezes a massa do fotão, ou seja $2 \times 0 = 0$.
Não há conservação da massa.