

Física Quântica (2009-2010)

dúvidas	qualquer dia	9h00-18h00 (gab D43)
entregar	quarta feira 11/11	(gab D43)
discussão	quinta feira 12/11	(sala C1)

11. Considere a transição $E_2 \rightarrow E_1$ para o átomo de hidrogénio. Por razões ainda não consideradas, o estado 2s não contribui para esta transição. Portanto, apenas os três estados 2p são relevantes. O comprimento de onda desta transição é igual a 122 nanómetros.

Num campo magnético as energias ligantes do electrão nos estados 2p, alteram-se de forma diferente para cada estado.

- a** Mostre que no modelo semi-clássico o momento magnético $\vec{\mu}_{\text{mag}}$ do electrão (aqui representado pela sua massa reduzida μ_e e pela sua carga eléctrica $-e$) na sua órbita (representada pelo momento angular orbital $\vec{L}_{\text{int}}$), é igual a

$$\vec{\mu}_{\text{mag}} = -\frac{e}{2\mu_e}\vec{L}_{\text{int}} \quad .$$

A quantidade $-e/(2m_e)$, que apenas envolve a carga eléctrica e a massa do electrão, chama-se *razão giromagnética* do electrão.

- b** Suponhamos que a mudança de energia ligante do electrão ΔE devida a um campo magnético fraco de intensidade B é caracterizada por

$$\Delta E = m \frac{e\hbar}{2\mu_e} B \quad ,$$

onde m representa o número quântico magnético do estado.

Calcula as mudanças dos comprimentos de onda (o efeito de Zeeman, 1896, prémio Nobel 1902) das três transições $E_2 \rightarrow E_1$ num campo magnético com intensidade de 1000 T (Tesla).

A quantidade $e\hbar/(2m_e)$ chama-se *magnetão de Bohr* e tem um valor igual a 9.27×10^{-24} J/T = 5.79×10^{-5} eV/T.

12. As soluções próprias $|n, \ell, m\rangle$ do Hamiltoniano com o potencial Coulombiano, dado por

$$H = \frac{p^2}{2\mu_e} + V_C(r) \quad ,$$

são simultaneamente as funções próprias do quadrado e da componente zz do momento angular orbital:

$$L^2|n, \ell, m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell + 1)|n, \ell, m\rangle \quad \text{e} \quad L_z|n, \ell, m\rangle = \hbar m|n, \ell, m\rangle \quad .$$

Isto é uma consequência da seguinte propriedade

$$[H, \vec{L}] = H \vec{L} - \vec{L} H = 0 \quad . \quad (1)$$

O momento linear $\vec{p}$ representa-se pelo operador

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad ,$$

o momento angular orbital $\vec{L}$ pelo operador $\vec{r} \times \vec{p}$, enquanto $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ representa a distância relativa entre o protão e o electrão.

Mostra que:

a

$$[p_x, L_z] = -i\hbar p_y \quad , \quad [p_y, L_z] = i\hbar p_x \quad \text{e} \quad [p_z, L_z] = 0 \quad .$$

b

$$[p_x^2, L_z] = -2i\hbar p_x p_y \quad , \quad [p_y^2, L_z] = 2i\hbar p_x p_y \quad \text{e} \quad [p_z^2, L_z] = 0 \quad .$$

c

$$[p^2, L_z] = 0 \quad \text{e} \quad [V_C(r), L_z] = 0 \quad .$$

Portanto, verifica-se a relação (1) para a componente L_z .

- 13.** Além da sua posição, indicada por $\vec{r} = (r, \vartheta, \varphi)$, um electrão tem outro grau de liberdade: o seu *spin*. Num campo magnético há duas orientações diferentes possíveis para o spin do electrão. Se o campo magnético é orientado ao longo do eixo dos zz , os dois possíveis estados do electrão são indicados por

$$\left|+\frac{1}{2}\right\rangle = \left|s_z = +\frac{1}{2}\right\rangle \quad \text{e} \quad \left|-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|s_z = -\frac{1}{2}\right\rangle \quad .$$

Os operadores associados com os observáveis do spin do electrão são designados por $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$, com as seguintes propriedades.

$$\begin{aligned} S_x \left|+\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{\hbar}{2} \left|-\frac{1}{2}\right\rangle \quad , \quad S_x \left|-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{\hbar}{2} \left|+\frac{1}{2}\right\rangle \\ S_y \left|+\frac{1}{2}\right\rangle &= i \frac{\hbar}{2} \left|-\frac{1}{2}\right\rangle \quad , \quad S_y \left|-\frac{1}{2}\right\rangle = -i \frac{\hbar}{2} \left|+\frac{1}{2}\right\rangle \\ S_z \left|+\frac{1}{2}\right\rangle &= \frac{\hbar}{2} \left|+\frac{1}{2}\right\rangle \quad , \quad S_z \left|-\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{\hbar}{2} \left|-\frac{1}{2}\right\rangle \quad . \end{aligned}$$

- a** Numa representação matricial, onde os dois estados do spin do electrão são representados pelos vectores

$$\left|+\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \left|-\frac{1}{2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

determina as matrizes que representam os operadores S_x , S_y e S_z (*as matrizes de Pauli*, inventadas por Wolfgang Pauli).

- b** Determina a matriz que representa $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$.
- c** Determina como actuam os operadores de *subida*, $S_+ = S_x + iS_y$, e de *descida*, $S_- = S_x - iS_y$, nos dois estados do spin do electrão.
- d** Determina os comutadores $[S_x, S_y]$, $[S_y, S_z]$ e $[S_z, S_x]$.

14. O momento linear $\vec{p}$ representa-se pelo operador

$$\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) ,$$

o momento angular orbital $\vec{L}$ pelo operador $\vec{r} \times \vec{p}$, enquanto $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ representa a distância relativa entre o protão e o electrão.

O operador $\vec{S}$ (definido no problema 13) está relacionado com a rotação interna do electrão e consequentemente é independente do movimento orbital do electrão. Portanto, considera-se que (observáveis independentes)

$$[\vec{L}, \vec{S}] = 0 .$$

- a** Determina os comutadores $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$ e $[L_z, L_x]$.
- b** Para $\vec{L} \cdot \vec{S} = L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z$, determina os comutadores $[\vec{L} \cdot \vec{S}, L_x]$, $[\vec{L} \cdot \vec{S}, L_y]$, $[\vec{L} \cdot \vec{S}, L_z]$, $[\vec{L} \cdot \vec{S}, S_x]$, $[\vec{L} \cdot \vec{S}, S_y]$ e $[\vec{L} \cdot \vec{S}, S_z]$.
- c** Determina os comutadores $[\vec{L} \cdot \vec{S}, L^2]$ e $[\vec{L} \cdot \vec{S}, S^2]$.