

Física Quântica (2009-2010)

dúvidas	qualquer dia	9h00-18h00 (gab D43)
entregar	quarta feira 22/9	(gab D43)
discussão	quinta feira 23/9	(sala C1)

1. Um pacote de ondas que representa o movimento de uma partícula livre numa dimensão em unidades $\hbar = c = 1$, é dado pela seguinte expressão

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \varphi(k) \exp \{i(kx - \omega(k)t)\} \quad ,$$

onde ($\bar{k}$ constante e $|\bar{k}| \gg \Delta k > 0$)

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\Delta k}} \theta \left((\Delta k)^2 - (k - \bar{k})^2 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\Delta k}} & , |k - \bar{k}| \leq \Delta k \\ 0 & , |k - \bar{k}| > \Delta k \end{cases} \quad ,$$

e

$$\omega(k) = \frac{k^2}{2m} \quad .$$

- a Mostre que no instante $t = 0$ a função de onda é dada por

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\Delta k}} e^{i\bar{k}x} \frac{\sin(\Delta k x)}{x} \quad ,$$

e faça um esquema de $|\psi(x, t = 0)|^2$ em função de x .

- b Determine graficamente Δx e $\Delta x \Delta k$ e compare o resultado com a relação de incerteza de Heisenberg.

2. Considere de novo o pacote de ondas do problema anterior (1) que representa o movimento de uma partícula livre numa dimensão em unidades $\hbar = c = 1$.

- a Determine

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |\varphi(k)|^2 \quad .$$

- b Determine (O integral número 11 da tabela das integrais na página <http://www.sosmath.com/tables/integral/integ37/integ37.html> do web pode ser útil.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t = 0)|^2$$

e interprete o resultado.

c Demonstre a seguinte relação

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t=0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dk' \varphi^*(k) \varphi(k') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k' - k)x} .$$

d A expressão

$$\delta(k' - k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i(k' - k)x}$$

é designada **a função delta de Dirac** e tem a seguinte propriedade

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk' F(k') \delta(k' - k) = F(k)$$

para funções F "bem comportadas".

Demonstre

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t=0)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\varphi(k)|^2$$

e verifique o resultado com as alíneas a) e b).

3. Considere mais uma vez o pacote de ondas do problema (1) que representa o movimento de uma partícula livre numa dimensão em unidades $\hbar = c = 1$.

a Faça outros esquemas de $|\psi(x, t=1)|^2$ e $|\psi(x, t=2)|^2$ na aproximação

$$\omega(k) = \frac{\bar{k}^2}{2m} + \frac{\bar{k}}{m} (k - \bar{k}) ,$$

em função de x e tire uma conclusão relativamente à velocidade do pacote de ondas.

b Mostre que o pacote de ondas é solução da seguinte equação de onda

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) ,$$

e interprete este resultado.

4. Considere um pacote de ondas que representa o movimento de uma partícula livre numa dimensão em unidades $\hbar = c = 1$, dado pela seguinte expressão

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \, \varphi(k) \exp \{i (kx - \omega(k)t)\} \quad ,$$

com

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2} \quad (\text{relação de Einstein}) \quad .$$

Mostre que o pacote de ondas é solução da seguinte equação de onda (equação de Klein e Gordon)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2 \right) \psi(x, t) \quad .$$