

Física Quântica (2009-2010)

dúvidas	qualquer dia	9h00-18h00 (gab D43)
entregar	quarta feira 16/12	(gab D43)

25. Na mecânica quântica, a barreira de potencial é um exercício modelo para estudar o fenómeno de *tunelamento quântico*, ou *efeito túnel*. A barreira de potencial numa dimensão tem a seguinte forma ($V_0 > 0$):

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ V_0 & \text{para } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{para } x > a \end{cases}$$

Portanto, para resolver a equação de Schrödinger é preciso considerar as três regiões em separado e depois aplicar condições de fronteira para $x = 0$ e $x = a$ de tal forma que a função da onda e a sua primeira derivada sejam contínuas.

- a Mostre que a função da onda para $E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = V_0 + \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} > V_0$, dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} A_r e^{ik_0 x} + A_\ell e^{-ik_0 x} & \text{para } x < 0 \\ B_r e^{ik_1 x} + B_\ell e^{-ik_1 x} & \text{para } 0 \leq x \leq a \\ C_r e^{ik_0 x} + C_\ell e^{-ik_0 x} & \text{para } x > a \end{cases}$$

$A_r, B_r, C_r, A_\ell, B_\ell$ e C_ℓ constantes, é uma solução da equação de Schrödinger.

- b Mostre que as condições de fronteira, dadas por

$$\psi(x \downarrow 0) = \psi(x \uparrow 0) \quad \text{e} \quad \frac{d\psi}{dx}(x \downarrow 0) = \frac{d\psi}{dx}(x \uparrow 0) \quad ,$$

resultam nas seguintes equações:

$$A_r + A_\ell = B_r + B_\ell \quad \text{e} \quad ik_0 (A_r - A_\ell) = ik_1 (B_r - B_\ell) \quad .$$

- c Mostre que as condições de fronteira, dadas por

$$\psi(x \downarrow a) = \psi(x \uparrow a) \quad \text{e} \quad \frac{d\psi}{dx}(x \downarrow a) = \frac{d\psi}{dx}(x \uparrow a) \quad ,$$

resultam nas seguintes equações:

$$B_r e^{ik_1 a} + B_\ell e^{-ik_1 a} = C_r e^{ik_0 a} + C_\ell e^{-ik_0 a}$$

e

$$ik_1 (B_r e^{ik_1 a} - B_\ell e^{-ik_1 a}) = ik_0 (C_r e^{ik_0 a} - C_\ell e^{-ik_0 a}) \quad .$$

26. Considere a barreira de potencial numa dimensão do exercício (25).

a Mostre que a função de onda para $E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = V_0$, dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} A_r e^{ik_0 x} + A_\ell e^{-ik_0 x} & \text{para } x < 0 \\ B_1 + B_2 x & \text{para } 0 \leq x \leq a \\ C_r e^{ik_0 x} + C_\ell e^{-ik_0 x} & \text{para } x > a \end{cases}$$

$A_r, B_1, C_r, A_\ell, B_2$ e C_ℓ constantes, é uma solução da equação de Schrödinger.

b Mostre que as condições fronteiras, dadas por

$$\psi(x \downarrow 0) = \psi(x \uparrow 0) \quad \text{e} \quad \frac{d\psi}{dx}(x \downarrow 0) = \frac{d\psi}{dx}(x \uparrow 0) \quad ,$$

resultam nas seguintes equações:

$$A_r + A_\ell = B_1 \quad \text{e} \quad ik_0 (A_r - A_\ell) = B_2 \quad .$$

c Mostre que as condições fronteiras, dadas por

$$\psi(x \downarrow a) = \psi(x \uparrow a) \quad \text{e} \quad \frac{d\psi}{dx}(x \downarrow a) = \frac{d\psi}{dx}(x \uparrow a) \quad ,$$

resultam nas seguintes equações:

$$B_1 + B_2 a = C_r e^{ik_0 a} + C_\ell e^{-ik_0 a}$$

e

$$B_2 = ik_0 \left(C_r e^{ik_0 a} - C_\ell e^{-ik_0 a} \right) \quad .$$

27. Considere a barreira de potencial numa dimensão do exercício (25).

a Mostre que a função da onda para $0 < E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = V_0 - \frac{\hbar^2 \kappa_1^2}{2m} < V_0$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} A_r e^{ik_0 x} + A_\ell e^{-ik_0 x} & \text{para } x < 0 \\ B_r e^{-\kappa_1 x} + B_\ell e^{\kappa_1 x} & \text{para } 0 \leq x \leq a \\ C_r e^{ik_0 x} + C_\ell e^{-ik_0 x} & \text{para } x > a \end{cases}$$

$A_r, B_r, C_r, A_\ell, B_\ell$ e C_ℓ constantes, é uma solução da equação de Schrödinger.

b Mostre que as condições de fronteira, dadas por

$$\psi(x \downarrow 0) = \psi(x \uparrow 0) \quad \text{e} \quad \frac{d\psi}{dx}(x \downarrow 0) = \frac{d\psi}{dx}(x \uparrow 0) \quad ,$$

resultam nas seguintes equações:

$$A_r + A_\ell = B_r + B_\ell \quad \text{e} \quad ik_0 (A_r - A_\ell) = -\kappa_1 (B_r - B_\ell) \quad .$$

c Mostre que as condições de fronteira, dadas por

$$\psi(x \downarrow a) = \psi(x \uparrow a) \quad \text{e} \quad \frac{d\psi}{dx}(x \downarrow a) = \frac{d\psi}{dx}(x \uparrow a) \quad ,$$

resultam nas seguintes equações:

$$B_r e^{-\kappa_1 a} + B_\ell e^{\kappa_1 a} = C_r e^{ik_0 a} + C_\ell e^{-ik_0 a}$$

e

$$i\kappa_1 (B_r e^{-\kappa_1 a} - B_\ell e^{\kappa_1 a}) = ik_0 (C_r e^{ik_0 a} - C_\ell e^{-ik_0 a}) \quad .$$

28. Considere mais uma vez a barreira de potencial numa dimensão do exercício (25). Pretendemos agora estudar uma onda que vem de $x = -\infty$ e que se desloca no sentido positivo. A onda é suposta ser reflectida em parte (em $x = 0$) e na outra parte ser transmitida (em $x = a$) pela barreira de potencial. Esta situação é representada por uma função de onda para $E = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} = V_0 + \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} > V_0$, dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ik_0 x} + r e^{-ik_0 x} & \text{para } x < 0 \\ B_r e^{ik_1 x} + B_\ell e^{-ik_1 x} & \text{para } 0 \leq x \leq a \\ t e^{ik_0 x} & \text{para } x > a \end{cases}$$

idêntica à função de onda do exercício (25), mas com $A_r = 1$, $A_\ell = r$ (coeficiente de reflexão), $C_r = t$ (coeficiente de transmissão) e $C_\ell = 0$ (não há sinal que se propague no sentido negativo para $x > a$, mas apenas um sinal transmitido que se propaga no sentido pósitoivo).

- a Usando as condições

$$A_r + A_\ell = B_r + B_\ell \quad , \quad ik_0 (A_r - A_\ell) = ik_1 (B_r - B_\ell) \quad ,$$

$$B_r e^{ik_1 a} + B_\ell e^{-ik_1 a} = C_r e^{ik_0 a} + C_\ell e^{-ik_0 a}$$

e

$$ik_1 (B_r e^{ik_1 a} - B_\ell e^{-ik_1 a}) = ik_0 (C_r e^{ik_0 a} - C_\ell e^{-ik_0 a})$$

obtidas no exercício (25), mostre que

$$(1 + r) \cos(k_1 a) + \frac{k_0}{k_1} (1 - r) i \sin(k_1 a) = t e^{ik_0 a}$$

$$ik_1 \left\{ (1 + r) i \sin(k_1 a) + \frac{k_0}{k_1} (1 - r) \cos(k_1 a) \right\} = ik_0 (t e^{ik_0 a}) \quad .$$

- b Mostre que

$$r = \frac{(k_0^2 - k_1^2) \sin(k_1 a)}{(k_0^2 + k_1^2) \sin(k_1 a) + 2ik_0 k_1 \cos(k_1 a)} \quad ,$$

e

$$t = \frac{2k_0 k_1 \{\sin(k_0 a) + i \cos(k_0 a)\}}{(k_0^2 + k_1^2) \sin(k_1 a) + 2ik_0 k_1 \cos(k_1 a)} \quad .$$

- c** A intensidade relativa T do sinal transmitido é igual ao quadrado do módulo da coeficiente de transmissão t . Mostre que

$$T(E > V_0 > 0) = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(E - V_0)} \sin^2(k_1 a)} \quad \text{e} \quad T + R = |t|^2 + |r|^2 = 1 \quad .$$

- d** O caso $0 < E < V_0$ obtém-se da alínea **c** através da substituição $k_1 \rightarrow i\kappa_1$. Mostre que

$$T(0 < E < V_0) = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(\kappa_1 a)} \quad .$$