

Física Quântica (2009-2010)

dúvidas	qualquer dia	9h00-18h00 (gab D43)
entregar	quarta feira 28/10	(gab D43)
discussão	quinta feira 29/10	(sala C1)

5. O espectro do átomo de hidrogénio é o conjunto de comprimentos de onda presentes na luz que o átomo de hidrogénio é capaz de emitir quando baixa de nível de energia.

O modelo mais simples do átomo de hidrogénio é representado pelo átomo de Bohr. Neste modelo o espectro de luz é composto de comprimentos de onda discretos, cujos valores são expressos pela fórmula de Rydberg

$$\frac{1}{\lambda_{\text{vac}}} = R_{\text{H}} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) ,$$

onde λ_{vac} é o comprimento de onda da luz emitida no vácuo, R_{H} é a constante de Rydberg para o hidrogénio, e n_1 e n_2 são inteiros tais que $n_1 < n_2$.

Deixando n_1 igual a 1 e fazendo n_2 percorrer valores de 2 a infinito, as linhas de espectro conhecidas como série de Lyman convergem para 91 nm. Da mesma maneira:

n_1	n_2		limite (nm)
1	$2 \rightarrow \infty$	Série de Lyman	91
2	$3 \rightarrow \infty$	Série de Balmer	365
3	$4 \rightarrow \infty$	Série de Paschen	821
4	$5 \rightarrow \infty$	Série de Brackett	1459
5	$6 \rightarrow \infty$	Série de Pfund	2280
6	$7 \rightarrow \infty$	Série de Humphreys	3283

- a** Determine os valores de n_2 para as linhas da série de Balmer (1885), H_{α} , H_{β} , H_{γ} , etc., que têm respectivamente os seguintes comprimentos de onda (em **nm**): no espectro visível 656.3 (vermelho), 486.1 (azul-verde), 434.1 (azul-violeta) e 410.2 (violeta) e no espectro ultra-violeta 397.0, 388.9, 383.5 e 364.6.
- b** A mesma pergunta para as linhas da série de Lyman, cujas frequências são (em 10^{15} Hz) 3.238, 3.223, 3.198, 3.158, 3.084, 2.924 e 2.467.

6. O termo da energia cinética da equação de Schrödinger é dado por

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2mr} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \psi(\vec{r}) + \frac{L^2}{2mr^2} \psi(\vec{r}) ,$$

onde o momento angular ao quadrado L^2 é dado por

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} .$$

Define ainda o seguinte operador

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} .$$

Mostre que as seguintes expressões são simultaneamente funções próprias de L^2 e de L_z e determine os respectivos valores próprios:

- a $Y_0^0(\vartheta, \varphi) = \sqrt{1/4\pi}$
- b $Y_1^0(\vartheta, \varphi) = \sqrt{3/4\pi} \cos(\vartheta)$
- c $Y_1^1(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{3/8\pi} \sin(\vartheta) e^{i\varphi}$
- d $Y_1^{-1}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{3/8\pi} \sin(\vartheta) e^{-i\varphi}$
- e $Y_2^0(\vartheta, \varphi) = \sqrt{5/16\pi} \{3 \cos^2(\vartheta) - 1\}$
- f $Y_2^1(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{15/32\pi} \sin(2\vartheta) e^{i\varphi}$
- g $Y_2^{-1}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{15/32\pi} \sin(2\vartheta) e^{-i\varphi}$
- h $Y_2^2(\vartheta, \varphi) = \sqrt{15/32\pi} \sin^2(\vartheta) e^{2i\varphi}$
- i $Y_2^{-2}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{15/32\pi} \sin^2(\vartheta) e^{-2i\varphi}$

7. Os operadores de subida L_+ e de descida L_- são dados por

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} \quad \text{e} \quad L_- = \hbar e^{-i\varphi} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\} .$$

Determine $L_+ Y_\ell^m$ e $L_- Y_\ell^m$ para cada uma das funções dadas no exercício (6).