

Física Quântica (2009-2010)

dúvidas	qualquer dia	9h00-18h00 (gab D43)
entregar	quarta feira 4/11	(gab D43)
discussão	quinta feira 5/11	(sala C1)

8. Considere a equação de onda para o sistema electrão-protão dada por

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_e r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\} R_{n\ell}(r) = E_n R_{n\ell}(r) \quad .$$

Mostre que as seguintes expressões $R_{n\ell}(r)$ para diversos valores de n ($n = 1, 2, 3, \dots$) e de ℓ ($\ell = 0, 1, 2, \dots \leq n-1$), são soluções dessa equação e determine os respectivos valores próprios E_n .

a $R_{10}(r) = 2 \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-r/a_0}$

b $R_{20}(r) = \left(\frac{1}{2a_0} \right)^{3/2} \left\{ 2 - \frac{r}{a_0} \right\} e^{-r/2a_0}$

c $R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2a_0} \right)^{3/2} \left\{ \frac{r}{a_0} \right\} e^{-r/2a_0}$

d $R_{30}(r) = 2 \left(\frac{1}{3a_0} \right)^{3/2} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \frac{r}{a_0} + \frac{2}{27} \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right\} e^{-r/3a_0}$

e $R_{31}(r) = \frac{3}{4} \sqrt{2} \left(\frac{1}{3a_0} \right)^{3/2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \frac{r}{a_0} \right\} e^{-r/3a_0}$

f $R_{32}(r) = \frac{2}{27} \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\frac{1}{3a_0} \right)^{3/2} \left\{ \left(\frac{r}{a_0} \right)^2 \right\} e^{-r/3a_0}$

onde a_0 represente o raio de Bohr dado por

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} \quad .$$

9. Considere os resultados dos exercícios (6) e (8).

a Caso $R_{n\ell}(r)$, para $n = 1, 2, 3, \dots$ e $\ell = 0, 1, 2, \dots \leq n-1$, é uma das soluções da equação

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_e r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\} R_{n\ell}(r) = E_n R_{n\ell}(r) \quad ,$$

e $Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$, para $\ell = 0, 1, 2, \dots$ e $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$, uma das soluções da equação

$$L^2 Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$$

com

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \quad ,$$

então mostre que $\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ é uma das soluções da equação

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_e r} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right\} \psi_{n\ell m}(\vec{r}) = E_n \psi_{n\ell m}(\vec{r}) \quad .$$

b Caso $R_{n\ell}(r)$ satisfaz a relação

$$\int_0^\infty r^2 dr |R_{n\ell}(r)|^2 = 1 \quad ,$$

e $Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ satisfaz a relação

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\vartheta) d\vartheta |Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)|^2 = 1 \quad ,$$

então mostre que $\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ satisfaz a relação

$$\int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty dz |\psi_{n\ell m}(x, y, z)|^2 = 1 \quad .$$

10. Um estado excitado do átomo de hidrogénio pode-se representar por $H(n, \ell, m)$, onde n , ℓ e m representam respectivamente o número quântico principal, o de momento angular orbital e o magnético ($m = -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \dots, +\ell$).

No entanto, da solução da equação de onda para o átomo de hidrogénio deduzimos que o espectro de Coulomb é dado por

$$E_n = -\frac{E_\infty}{n^2} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

e ainda a condição $\ell \leq n - 1$ para estados quânticos fisicamente aceitáveis.

Portanto, existem vários estados excitados diferentes com a mesma energia.

Este fenómeno chama-se *degenerescência*.

- a Demostra que o número de estados excitados diferentes com energia E_n , é igual ao quadrado do número quântico principal n .

Do passado existe ainda uma outra classificação dos estados excitados de hidrogénio, classificação em que se consideram como manifestações diferentes do mesmo estado $H(n, \ell)$ (indicado por $n\ell$), os vários estados $H(n, \ell, 0)$, $H(n, \ell, \pm 1)$, $H(n, \ell, \pm 2)$, ..., $H(n, \ell, \pm \ell)$. Neste abordagem o número quântico de momento angular orbital ℓ é representado por uma letra de acordo com o seguinte quadro

ℓ	0	1	2	3	4	5	6	7
letra	s	p	d	f	g	h	i	j

- b Faça um quadro para estados quânticos fisicamente aceitáveis onde se indica os estados $H(n, \ell)$ para $n = 1, \dots, 6$ e $\ell = 0, \dots, 5$.