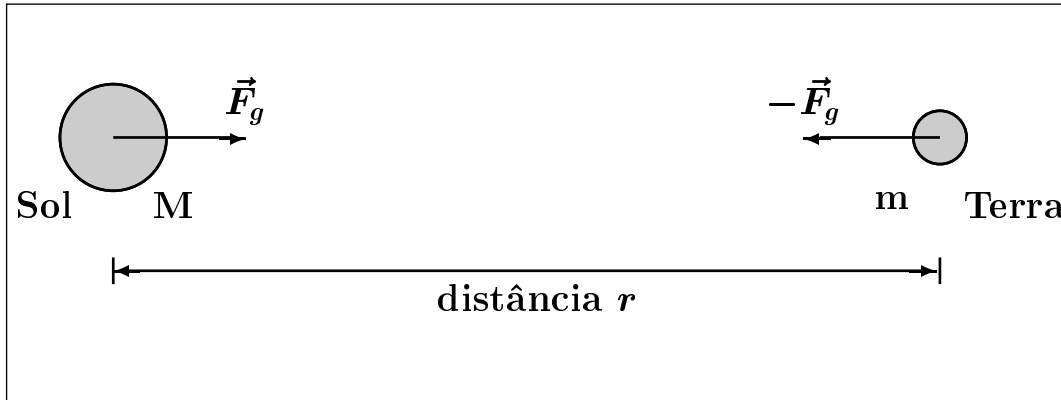


Força Gravítica

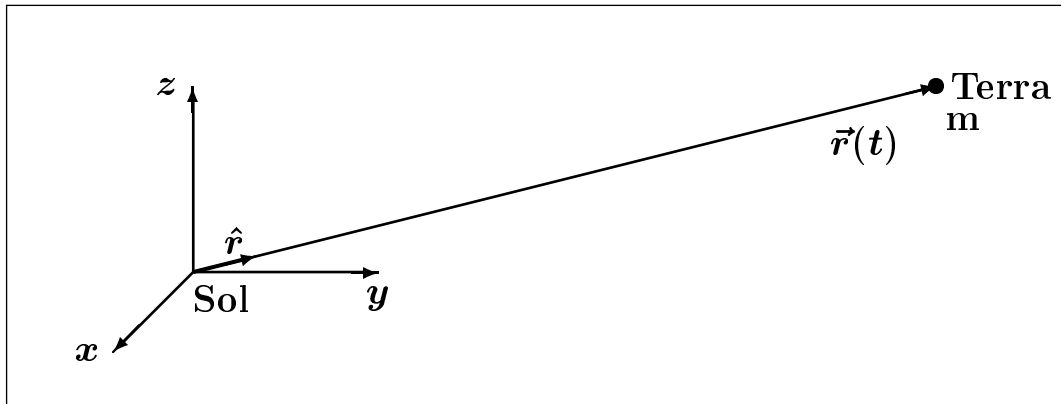
é a força entre dois objectos maços

por exemplo entre a Terra e o Sol



$$F_g = |\vec{F}_g| = G \frac{m M}{r^2} \quad (\text{Newton})$$

a Equação de Movimento da Terra



direcção da força gravítica: \hat{r}

sentido da força gravítica: $-\hat{r}$

$$m \times \text{aceleração} = -G \frac{m M}{r^2} \hat{r}$$

$$\text{aceleração} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$m \times \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = -G \frac{m M}{r^2} \hat{r}$$

As soluções da última equação representam as órbitas dos planetas e cometas.

Princípio da Equivalência

$$\begin{array}{c} \text{massa gravítica } m_g \\ \downarrow \\ m \times \text{aceleração} = -G \frac{m M}{r^2} \hat{r} \\ \uparrow \\ \text{massa de inércia } m_e \end{array}$$

$$m_g = m_e ?$$

experiência

$$\left| \frac{m_e - m_g}{m_e} \right|$$

L. von Eötvös (Budapest, 1890) < 0.000000005

R.H. Dicke (Princeton, 1964) < 0.00000000001

Suponha-se então:

$$m_g = m_e$$

Ou seja,

com

$$m_e \times \text{aceleração} = -G \frac{m_g M}{r^2} \hat{r}$$

temos

$$\text{aceleração} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$$

- Não há referência à massa da Terra.
- Movimento da Terra é independente da sua massa (Galileo).
- Qualquer outro objecto na órbita da Terra ia demorar um ano para fazer uma volta completa, tal como a Terra.

Einstein

Conclusão:

- Não é preciso preocupar-me com os objectos.
- Os caminhos são iguais para todos os objectos.
- Apenas é preciso determinar os caminhos.

Curvatura e caminhos naturais:

Num terreno acidentada há caminhos naturais.

A melhor maneira de descobri-los
é
deixar uma bola rolar livremente
ou
estudar as correntes de água da chuva.

Estes caminhos naturais chamam-se geodésicas.

Por exemplo, numa esfera
as geodésicas são os círculos máximos.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Janos Bolyai (1802-1860)

Nikolay Ivanovich Lobachevski (1793-1856)

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

O Tempo

Em Mecânica Clássica o tempo tem um papel especial.

Por exemplo: vector de posição $\vec{r}(t)$

O vector de posição de um objecto representa três funções dependentes do tempo

$$x(t), y(t) \text{ e } z(t).$$

As coordenadas do espaço (3 dimensões) são

$$x, y \text{ e } z.$$

Einstein

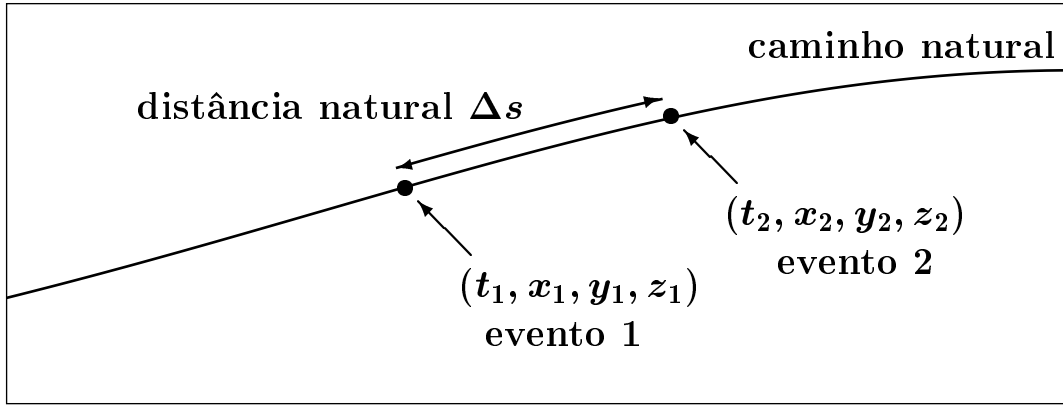
o Tempo é apenas mais uma coordenada

Em Relatividade (4 dimensões)

t, x, y e z

são as coordenadas do espaço-tempo.

Caminhos Naturais



intervalo entre eventos:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta z = z_2 - z_1$$

distância natural: Δs

$$(\Delta s)^2 =$$

$$\begin{aligned} &g_{tt} (\Delta t)^2 + g_{tx} \Delta t \Delta x + g_{ty} \Delta t \Delta y + g_{tz} \Delta t \Delta z + \\ &g_{xt} \Delta x \Delta t + g_{xx} (\Delta x)^2 + g_{xy} \Delta x \Delta y + g_{xz} \Delta x \Delta z + \\ &g_{yt} \Delta y \Delta t + g_{yx} \Delta y \Delta x + g_{yy} (\Delta y)^2 + g_{yz} \Delta y \Delta z + \\ &g_{zt} \Delta z \Delta t + g_{zx} \Delta z \Delta x + g_{zy} \Delta z \Delta y + g_{zz} (\Delta z)^2 \end{aligned}$$

A Métrica

$$\begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} \\ g_{xt} & g_{xx} & g_{xy} & g_{zx} \\ g_{yt} & g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zt} & g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix}$$

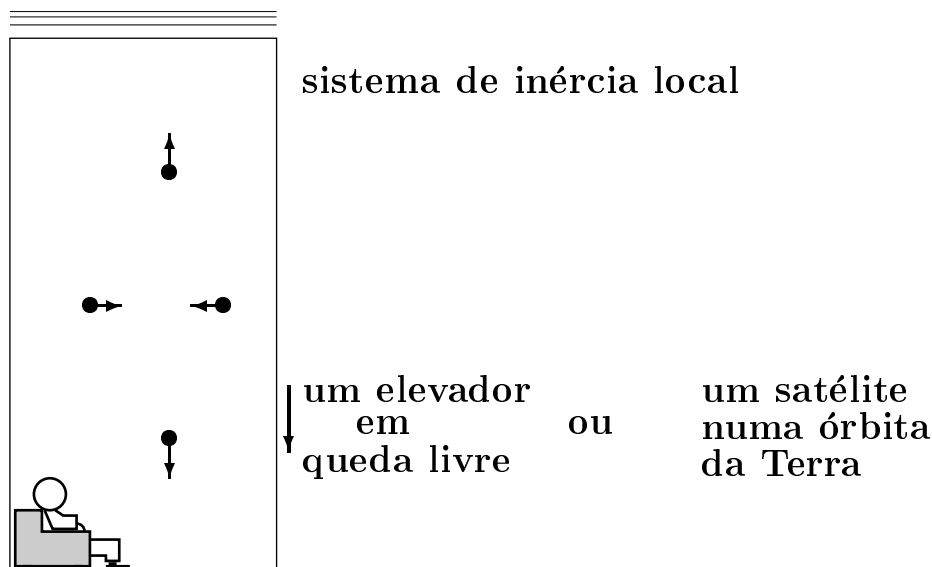
- Há 16 elementos $g_{\mu\nu}$ da métrica
- $\mu, \nu = 0$ (t), 1 (x), 2 (y) ou 3 (z).
- Defina-se $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$.
- No entanto temos $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$ (matriz simétrica)
- portanto, há 10 elementos $g_{\mu\nu}$ independentes

as Forças de Maré

Em geral, os elementos $g_{\mu\nu}$ da métrica não são constantes, mas sim funções do espaço-tempo:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(t, x, y, z)$$

Há forças de maré quando as segundas derivadas da métrica não se anulam.



Um elevador em queda livre representa um sistema de inércia local.

A pequenas distâncias e durante um curto intervalo de tempo os objectos caem com o observador sem se mexerem.

Mas para intervalos de tempo maiores observa-se que os objectos se afastam uns dos outros na direcção da queda e se aproximam mutuamente na direcção perpendicular.

São estas as forças responsáveis pelos movimentos de maré dos oceanos.

Einstein

Quando a métrica
de um determinado campo gravítico
é conhecida
podemos determinar os caminhos naturais,
ou seja,
os movimentos de objectos.

Determinar os Caminhos Naturais
é
resolver a Equação Geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} \frac{dx^\sigma}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0$$

a Equação Geodésica

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \\ & \Gamma_{tt}^\mu \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \Gamma_{tx}^\mu \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} + \Gamma_{ty}^\mu \frac{dt}{ds} \frac{dy}{ds} + \Gamma_{tz}^\mu \frac{dt}{ds} \frac{dz}{ds} + \\ & \Gamma_{xt}^\mu \frac{dx}{ds} \frac{dt}{ds} + \Gamma_{xx}^\mu \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \Gamma_{xy}^\mu \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \Gamma_{xz}^\mu \frac{dx}{ds} \frac{dz}{ds} + \\ & \Gamma_{yt}^\mu \frac{dy}{ds} \frac{dt}{ds} + \Gamma_{yx}^\mu \frac{dy}{ds} \frac{dx}{ds} + \Gamma_{yy}^\mu \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \Gamma_{yz}^\mu \frac{dy}{ds} \frac{dz}{ds} + \\ & \Gamma_{zt}^\mu \frac{dz}{ds} \frac{dt}{ds} + \Gamma_{zx}^\mu \frac{dz}{ds} \frac{dx}{ds} + \Gamma_{zy}^\mu \frac{dz}{ds} \frac{dy}{ds} + \Gamma_{zz}^\mu \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \end{aligned}$$

para $\mu = 0$, $\mu = 1$, $\mu = 2$ e $\mu = 3$.

São quatro equações diferenciais acopladas
para resolver $t(s)$, $x(s)$, $y(s)$ e $z(s)$.

$$\text{Simetria: } \Gamma_{\sigma\rho}^\mu = \Gamma_{\rho\sigma}^\mu$$

Conexão Afim (Christoffel, 1867)

$$\Gamma_{\sigma\rho}^{\mu} = g^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\sigma\rho}$$

$g^{\mu\nu}$ são os elementos do inverso da métrica $g_{\mu\nu}$

$$\Gamma_{\nu\sigma\rho} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\nu}} \right\}$$

Lembrem-se que a derivada parcial significa

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = \left[\frac{d g_{\alpha\beta}(t, x, y, z)}{dt} \right]_{x, y, z \text{ constantes}}$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^1} = \left[\frac{d g_{\alpha\beta}(t, x, y, z)}{dx} \right]_{t, y, z \text{ constantes}}$$

etcetera

Determinar a Métrica

Einstein:

“Deve existir uma relação entre
a métrica
e a distribuição de massa”

Por exemplo:

O Sol é a massa mais relevante do sistema solar.

Portanto, o campo gravítico do sistema solar é, numa primeira aproximação, inteiramente determinado pela massa do Sol.

	massa/(massa Sol)
Sol	1.0
Júpiter	0.00095
Saturno	0.00028
Neptuno	0.000052
Urano	0.000043
Terra	0.000003
Vénus	0.0000024

o Tensor de Energia-Momento

Neste tensor

(uma matriz simétrica 4×4)

são armazenadas todas as informações sobre

a distribuição de massa

e as correntes de massa.

$$T^{\mu\nu}(t, \vec{r})$$

Por exemplo, para uma massa (M) pontual

no centro do sistema de coordenadas

$$\begin{pmatrix} M\delta(\mathbf{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{se } \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{se } \mathbf{r} \neq \mathbf{0} \end{cases}$$

a Equação de Einstein (1915)

Relação métrica e Tensor de Energia-Momento

$$G^{\mu\nu}(t, \vec{r}) = 8\pi G T^{\mu\nu}(t, \vec{r})$$

Tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$

a Equação de Einstein

constitui

10 equações diferenciais de segunda ordem

Tensor de Einstein

1. Tensor de Curvatura

$$R^{\alpha}_{\nu\rho\sigma} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} \Gamma^{\beta}_{\nu\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} \Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}$$

2. Tensor de Ricci

$$R^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} R^{\alpha}_{\sigma\alpha\rho}$$

3. Escalar de curvatura

$$R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$$

4. Tensor de Einstein

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R$$

A partir da métrica

$g_{\mu\nu}$ — métrica

$\Gamma_{\sigma\rho}^{\mu}$ — conexão afim

$R_{\nu\rho\sigma}^{\alpha}$ — tensor de curvatura

$R^{\mu\nu}$ — tensor de Ricci

R — escalar de curvatura

$G^{\mu\nu}$ — tensor de Einstein

$T^{\mu\nu}$ — tensor de energia-momento

Cálculos e muitos,

mas sem problemas fundamentais.

A partir do tensor de energia-momento

$$T^{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mu\nu}$$

mais difícil

Temos de resolver umas equações diferenciais de segunda ordem.

Ideias são Bem Vindas.

a Solução de Schwarzschild (1916)

O Karl Schwarzschild resolveu a equação de Einstein um ano depois da sua publicação por Einstein, para uma distribuição esfericamente simétrica de massa.

o Tensor de Energia-Momento para uma distribuição esfericamente simétrica de massa é dado na página 17.

a Métrica que resolve a equação de Einstein para este Tensor de Energia-Momento é dada por

$$ds^2 = A(r) dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} - r^2 \{d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2\}$$

$$\text{com } A(r) = 1 - \frac{2MG}{r}$$

em Coordenadas Esféricas t, r, ϑ e φ .

$$x = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \cos(\vartheta)$$

planetas e cometas

Para objectos que têm velocidades modestas (bem inferior à da luz), a partir da equação geodésica para a métrica de Schwarzschild obtemos caminhos naturais dados por

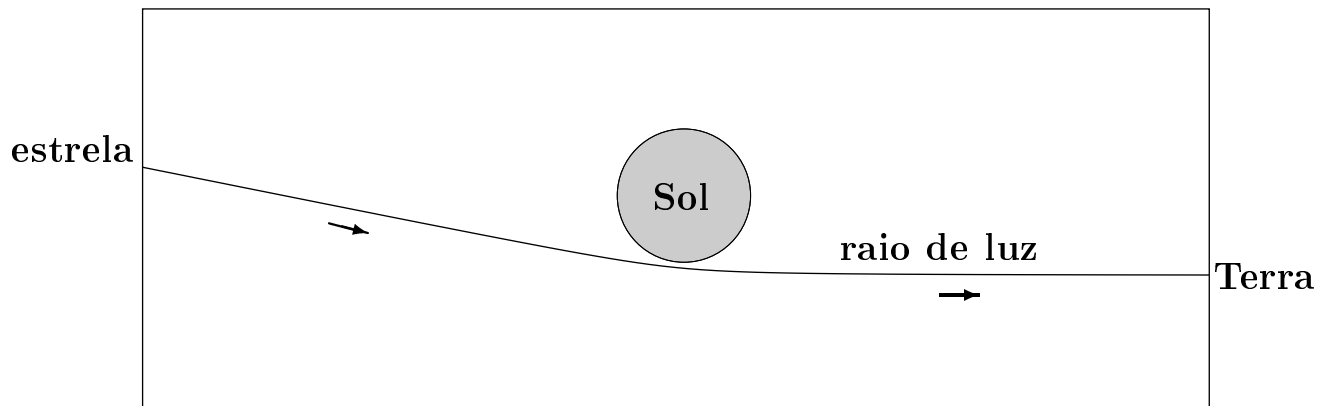
$$r(\varphi) = \frac{j^2/MG}{1 - e \cos(\varphi)}$$

com

$e = 0$	circunferências
$0 < e < 1$	elipses
$e = 1$	parábolas
$e > 1$	hipérbolas

São as órbitas de Keppler.

a Deflexão da luz no campo gravítico do Sol



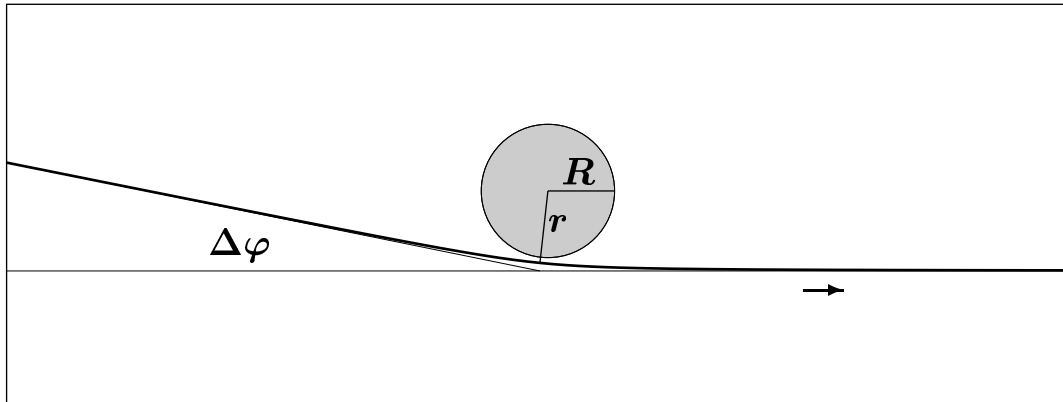
A métrica de Schwarzschild resolve as órbitas de Keppler,

mas também descreve

os caminhos (raios) da luz.

De acordo com a teoria de Einstein também o movimento da luz é influenciado pelo campo gravítico.

o Ângulo de deflexão



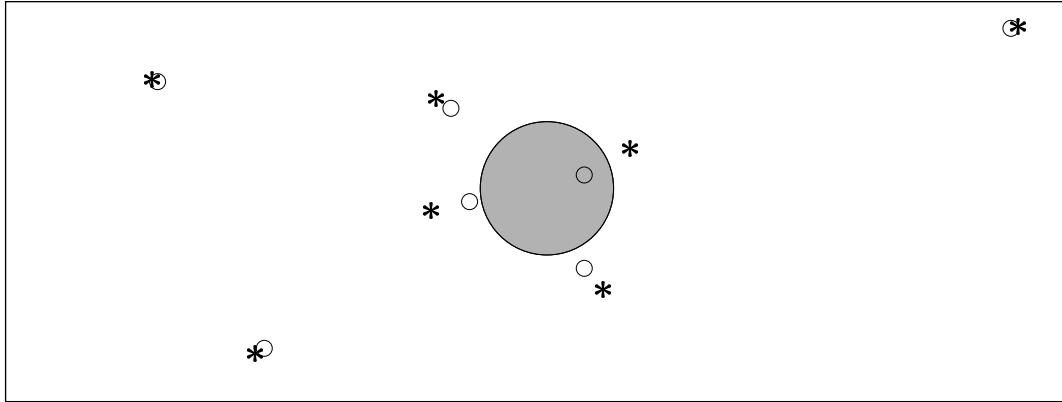
Com a solução de Schwarzschild é possível fazer previsões:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{4MG}{R} \right) \times \frac{R}{r}$$

	$\frac{4MG}{R}$
Sol	1.75''
Júpiter	0.016''
Saturno	0.0058''
Neptuno	0.025''
Urano	0.0020''
Terra	0.00058''
Vénus	0.00047''

$$(1'' = 0.00028^\circ)$$

a Experiência (1922)



A previsão da teoria de Einstein para o Sol é $1.75''$

$$\frac{4MG}{R} = \frac{r}{R} \times \Delta\varphi$$

Eclipse total do Sol

em Wallal (Austrália) dia 21 de Setembro de 1922

deflexão observada de 15 estrelas

por Campbell e Trumpler

$$\frac{4MG}{R} = 1.73'' \pm 0.31''$$

os Dados Experimentais

$\Delta\varphi$	R/r	$\frac{4MG}{R}$
0.70''	0.445	1.92''
0.50''	0.261	1.92''
0.43''	0.323	1.33''
0.40''	0.240	1.67''
0.40''	0.204	1.96''
0.37''	0.148	2.50''
0.33''	0.176	1.87''
0.30''	0.158	1.90''
0.30''	0.188	1.60''
0.30''	0.182	1.65''
0.27''	0.155	1.74''
0.25''	0.148	1.69''
0.25''	0.146	1.71''
0.20''	0.150	1.33''
0.20''	0.173	1.15''

o Universo

Estrelas são pequenas luzes penduradas no firmamento para enfeitar as noites. Qualquer que seja a explicação para a sua existência, as estrelas brilham para nos agradar e nos fazer sentir bem durante a noite. Não há mal nenhum em apenas aceitar esta maravilhosa prenda da Natureza.

No entanto, o estudo da natureza das estrelas revelou-nos ainda mais maravilhas.

A vida de uma estrela vai a partir do seu nascimento até ao seu fim. Ela vive uns bons bilhões de anos e portanto raramente se repara na evolução de uma estrela. As estrelas na nossa vizinhança são bastante estáveis. Mas a distâncias mais longas, muitas estrelas estão a nascer ou a chegar ao seu fim. Para estudar a vida de uma estrela são precisos observatórios com bons telescópios. Os melhores que temos hoje em dia são os satélites Hubble e Chandra.

a Estrela mais próxima

Durante o dia a estrela mais próxima é o Sol. É uma estrela de tamanho médio, jovem (apenas uns cinco bilhões de anos de vida) e viril.

De noite a estrela mais próxima é Alfa de Centauro C. Uma estrela brilhante a 4 anos-luz de distância. Isto significa que observações desta estrela relatam eventos passados quatro anos atrás.

No interior do Sol a temperatura é de 15 milhões de graus por causa das reacções nucleares, basicamente a transformação de Hidrogénio em Hélio. À superfície do Sol a temperatura é de 6000 graus.

a Vida de uma Estrela

antes Nebulosa

(nuvem de gases, Hidrogénio e Hélio, e poeira)

fase 1 - a Força Gravítica faz o gás contrair-se

- começam as reacções nucleares

- a Temperatura no interior aumenta

fase 2 durante centenas de milhões até bilhões de anos

transforma-se Hidrogénio em Hélio

fase 3 Hélio transforma-se em Carbono

o fim Estrelas grandes acabam mais rapidamente com

o seu combustível do que estrelas pequenas

o fim depende do tamanho da estrela.

Anões Amarelos

Estrelas do tamanho do nosso Sol.

Vivem vários bilhões de anos, mas são menos quentes que os gigantes.

No fim do seu ciclo crescem inicialmente e tornam-se gigantes vermelhos. Depois diluem-se e formam uma nuvem planetária.

O núcleo, inicialmente muito quente (anão branco), arrefece (anão vermelho) e acaba sem emitir luz visível.

Gigantes Azuis

Estrelas pesadas emitem luz branca ou azul e são muito quentes. Elas vivem umas centenas de milhões de anos.

Depois crescem muito, tornam-se supergigantes e acabam numa explosão (supernova). Do núcleo forma-se uma estrela de neutrões ou, às vezes, um buraco negro.

Uma estrela de neutrões
emite radiação com as frequências da rádio.
Um buraco negro não emite radiação nenhuma.

o Buraco Negro

a Solução de Schwarzschild (página 22)
tem uma singularidade quando

$$A(r) = 0 \text{ , ou seja, quando } r = 2MG$$

De uma estrela nem sequer luz é emitida,
quando ela tem um tamanho inferior a esta distância.

Por isso o nome: buraco negro.

A teoria de Einstein previu a existência destes objectos.

Entretanto,
vários destes objectos já foram detectados.

Desde pequenos,
com uma massa de algumas vezes a massa do Sol
e um tamanho de poucos quilómetros,
até gigantes,
dois bilhões de vezes mais pesados do que o Sol
e do tamanho do nosso sistema solar.

Algumas pessoas de astrofísica e cosmologia no país

Universidade	contacto
de Porto	Paulo Gali Macedo http://www.astro.up.pt/caup/staff/pgali.html http://www.astro.up.pt/caup
Técnica de Lisboa	Orfeu Bertolami http://alfa.ist.utl.pt/~orfeu/homeorfeu.html Maria da Conceição Bento http://cfif.ist.utl.pt/~bento
de Coimbra	Alex H. Blin http://cft.fis.uc.pt/alex/alex.html Eef van Beveren http://cft.fis.uc.pt/eef
do Algarve	Robertus Potting http://w3.ualg.pt/~rpotting http://www.ualg.pt/fct/fisica/centra/centralg.html