RELATIVIDADE GERAL 2011-2012

1. Considere a seguinte transformação de coordenadas entre as coordenadas $\left(t^{(A)}, \vec{x}^{(A)}\right)$ num referencial A, em movimento com velocidade constante $\vec{\beta}^{(AB)}$, relativamente a um referencial B e as coordenadas $\left(t^{(B)}, \vec{x}^{(B)}\right)$ no referencial B.

$$\begin{pmatrix} t^{(B)} \\ x_1^{(B)} \\ x_2^{(B)} \\ x_3^{(B)} \end{pmatrix} = \Lambda(AB) \begin{pmatrix} t^{(A)} \\ x_1^{(A)} \\ x_2^{(A)} \\ x_3^{(A)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Lambda(AB)^0{}_0 & \Lambda(AB)^0{}_1 & \Lambda(AB)^0{}_2 & \Lambda(AB)^0{}_3 \\ \Lambda(AB)^1{}_0 & \Lambda(AB)^1{}_1 & \Lambda(AB)^1{}_2 & \Lambda(AB)^1{}_3 \\ \Lambda(AB)^2{}_0 & \Lambda(AB)^2{}_1 & \Lambda(AB)^2{}_2 & \Lambda(AB)^2{}_3 \\ \Lambda(AB)^3{}_0 & \Lambda(AB)^3{}_1 & \Lambda(AB)^3{}_2 & \Lambda(AB)^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{(A)} \\ x_1^{(A)} \\ x_2^{(A)} \\ x_3^{(A)} \end{pmatrix} \tag{1}$$

onde

$$\Lambda(AB)^0{}_0 = \gamma_{AB} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{\beta}^{(AB)} \cdot \vec{\beta}^{(AB)}}} \quad ,$$

$$\Lambda(AB)^0{}_i = \Lambda(AB)^i{}_0 = \gamma_{AB}\beta_i^{(AB)}$$

$$\text{e} \quad \Lambda(AB)^i{}_j = \delta_{ij} + \frac{\beta_i^{(AB)}\beta_j^{(AB)}}{\vec{\beta}^{(AB)} \cdot \vec{\beta}^{(AB)}}(\gamma_{AB} - 1) \quad ,$$

para $i, j = 1, 2, 3$.
Demonstre $\Lambda(BC)\Lambda(AB) = \Lambda(AC)$.

2. Considere duas partículas a e b de massas m_a e m_b respectivamente e que movem num referencial A com velocidades $\vec{v}_a^{(A)}$ e $\vec{v}_b^{(A)}$ respectivamente e cujas energias E e momentos lineares $\vec{p}$ são respectivamente dados por

$$E_{a,b}^{(A)} = \frac{m_{a,b}}{\sqrt{1 - \vec{v}_{a,b}^{(A)} \cdot \vec{v}_{a,b}^{(A)}}} \quad \text{e} \quad \vec{p}_{a,b}^{(A)} = \frac{m_{a,b}\vec{v}_{a,b}^{(A)}}{\sqrt{1 - \vec{v}_{a,b}^{(A)} \cdot \vec{v}_{a,b}^{(A)}}} \tag{2}$$

Demonstre que a massa invariante total s do sistema $(a+b)$, definida por

$$s = \left(E_a^{(A)} + E_b^{(A)}\right)^2 - \left(\vec{p}_a^{(A)} + \vec{p}_b^{(A)}\right)^2 \tag{3}$$

é invariant sob transformações de Lorentz (Eq. 1).

3. Considere um choque entre duas partículas a e b que resulta na criação de duas outras (ou as mesmas) partículas c e d.

a Demonstre que o variáveis de Mandelstam s, t e u, definidos por

$$\begin{aligned} s &= (E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 = (E_c + E_d)^2 - (\vec{p}_c + \vec{p}_d)^2 && (4) \\ t &= (E_a - E_c)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_c)^2 = (E_b - E_d)^2 - (\vec{p}_b - \vec{p}_d)^2 && (5) \\ u &= (E_a - E_d)^2 - (\vec{p}_a - \vec{p}_d)^2 = (E_b - E_c)^2 - (\vec{p}_b - \vec{p}_c)^2 && (6) \end{aligned}$$

são invariantes sob transformações de Lorentz (Eq. 1).

b Demonstre que

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \quad ,$$

b Caso $m_c = m_a$ e $m_d = m_b$, demonstre que no referencial em que a partícula b está em repouso antes do choque

$$\begin{aligned} s &= m_a^2 + m_b^2 + 2m_bE_a \\ t &= 2m_a^2 - 2E_aE_c + 2p_ap_c\cos(\vartheta_{\text{lab}}) \\ u &= m_a^2 + m_b^2 - 2m_bE_c \end{aligned}$$

onde ϑ_{lab} é o ângulo entre $\vec{p}_c$ e $\vec{p}_a$ no referencial em que a partícula b está em repouso antes do choque.

4. Considere um espaço tridimensional com base cartesiana ortonormal $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$. Uma base arbitrária $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ e $\boldsymbol{e}_3$ neste espaço é dado por:

$$\boldsymbol{e}_1 = \hat{x} - \hat{y} \quad , \quad \boldsymbol{e}_2 = \hat{x} + 2\hat{y} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{e}_3 = 2\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} \quad .$$

Considere ainda os dois vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, dados por:

$$\vec{v} = 2\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \quad \text{e} \quad \vec{w} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \quad .$$

a. Determine as componentes de $\vec{v}$ e $\vec{w}$ na base cartesiana.

b. Determine na base cartesiana $\vec{v} \cdot \vec{v}$ e $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

c. Determine os elementos da métrica $g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ para i, j = 1,2,3.

d. Determine $g_{ij}\ v^i v^j$ e $g_{ij}\ v^i w^j$, e compare com os resultados da alínea b).

e. Determine $\vec{v} \cdot \boldsymbol{e}_i$ e $g_{ij}\ v^j$ para i = 1,2,3.

No espaço acima referido, considere ainda a base $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ e $\boldsymbol{a}_3$, dada por:

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_1 - \frac{3}{5}\boldsymbol{e}_2 \quad , \quad \boldsymbol{a}_2 = \frac{3}{5}\boldsymbol{e}_1 + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_2 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{e}_3 \quad .$$

f. Determine as componentes contra-variantes $\bar{v}^i$ e $\bar{w}^i$ de respectivamente $\vec{v}$ e $\vec{w}$ nesta nova base.

g. Determina a métrica $\bar{g}$ desta nova base.

h. Determine $\vec{v} \cdot \boldsymbol{a}_i$ e $\bar{g}_{ij}\ \bar{v}^j$ para i = 1,2,3, e verifique a fórmula (84) da sebenta.

5. Considere um espaço tridimensional com base cartesiana ortonormal $\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$ e $\hat{e}_3 = \hat{z}$. Um ponto arbitrário $\vec{x}$ neste espaço é descrito pelas coordenadas x^1, x^2 e x^3 de acordo com:

$$\vec{x} = x^i \hat{e}_i = x^1 \hat{e}_1 + x^2 \hat{e}_2 + x^3 \hat{e}_3 \quad .$$

Considere neste espaço ainda um outro conjunto de coordenadas $\bar{x}^1 = r$, $\bar{x}^2 = \vartheta$ e $\bar{x}^3 = \varphi$, dado por:

$$x^1 = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \quad , \quad x^2 = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \quad \text{e} \quad x^3 = r\cos(\vartheta) \quad .$$

a. Determine as bases locais nos pontos $\vec{x} = \hat{e}_1$, $\vec{x} = (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)/\sqrt{2}$, $\vec{x} = \hat{e}_2$ e $\vec{x} = (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \sqrt{2}\hat{e}_3)/2$.

b. Determine os elementos da métrica $g_{ij}\,(\bar{x})$ para i, j = 1,2,3.

Considere em seguida o vector $\Delta\vec{v}$, dado por:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(r = 2, \vartheta = 45^\circ, \varphi = 45^\circ + \Delta\varphi) - \vec{v}(r = 2, \vartheta = 45^\circ, \varphi = 45^\circ) \quad .$$

c. Mostre que, em primeira ordem em $\Delta\varphi$, o vector $\Delta\vec{v}$, na base local do ponto $\vec{x} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \sqrt{2}\hat{e}_3$, é dado por:

$$\Delta\vec{v} = \Delta\varphi(-\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \quad .$$

d. Determine $|\Delta\vec{v}|$ em primeira ordem em $\Delta\varphi$, usando a métrica $g(\bar{x})$ no ponto $\vec{x} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \sqrt{2}\hat{e}_3$, e interprete o resultado.

6. Considere um espaço tridimensional com base cartesiana ortonormal $\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$ e $\hat{e}_3 = \hat{z}$. Um ponto arbitrário $\vec{x}$ neste espaço é descrito pelas coordenadas x^1, x^2 e x^3 de acordo com:

$$\vec{x} = x^{i} \hat{e}_{i} = x^1 \hat{e}_1 + x^2 \hat{e}_2 + x^3 \hat{e}_3 \quad .$$

Considere neste espaço ainda um outro conjunto de coordenadas $\bar{x}^1 = r$, $\bar{x}^2 = \vartheta$ e $\bar{x}^3 = \varphi$, dado por:

$$x^1 = r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \quad , \quad x^2 = r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \quad \text{e} \quad x^3 = r \cos(\vartheta) \quad .$$

a. Determine a conexão afim $\Gamma^{k}_{\;ij} \ (r, \vartheta, \varphi)$ para i, j, k = 1,2,3.

b. Determine, de um campo vectorial $\vec{v}$ dado por $\vec{v}(x^1, x^2, x^3) = x^{i} \hat{e}_{i}$, usando a fórmula (110) da sebenta, as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vartheta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \varphi} \quad .$$

7. Considere um espaço tridimensional com base cartesiana ortonormal $\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$ e $\hat{e}_3 = \hat{z}$. Considere neste espaço uma curva dada por:

$$\vec{x}(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) \hat{e}_1 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right) \hat{e}_2 + \pi t \hat{e}_3 \quad .$$

a. Faça um esquema da curva para valores de t entre 0 e 1.

b. Determine o vector tangente, dado por $\dfrac{d\vec{x}(t)}{dt}$.

c. Calcule os vectores tangentes nos pontos parametrizados por $t = 0$ e $t = 0.1$, e determine o ângulo α entre estes vectores.

d. Calcule a distância s ao longo da curva entre os dois pontos da alinea c).

e. Numa aproximação em que se considera que a parte da curva entre os dois pontos $t = 0$ e $t = 0.1$ faz parte de um círculo, determine o raio da curvatura deste círculo através a fórmula $s = R\alpha$. Repita os calculos para $t = 0$ e $t = 0.01$.

8. Considere a curva da pergunta anterior e o parâmetro s, dado por:

$$s(t) = \int_0^t dt' \left| \frac{d\vec{x}(t')}{dt'} \right| \quad .$$

a. Determine a relação entre s e t, e parametriza a curva através da equação $\vec{x}(s)$.

b. Determine a base local natural da curva, $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\boldsymbol{h}(s)$ e $\boldsymbol{b}(s)$.

c. Determine o raio da curvatura da curva, usando a relação (129) da sebenta e compare com o resultado da alinea c) da pergunta anterior.

d. Verifique as relações de Frenet.

9. Considere num espaço tridimensional com base cartesiana ortonormal $\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$ e $\hat{e}_3 = \hat{z}$, uma superfície de duas dimensões, dada por:

$$\vec{x}(\varphi, z) = 2\cos(\varphi)\hat{e}_1 + 2\sin(\varphi)\hat{e}_2 + z\hat{e}_3 \quad .$$

a. Determine uma base local de dois vectores tangentes à superfície, $\vec{a}_1(\varphi, z)$ e $\vec{a}_2(\varphi, z)$, e um vector normal, $\vec{n}(\varphi, z)$, usando as fórmulas (141) e (143) da sebenta.

b. Considere uma curva na superfície de equações parametricas $\varphi(s)$ e $z(s)$. Sendo $\varphi(s) = s/\sqrt{8}$ e $z(s) = s/\sqrt{2}$, mostre que s é a distância própria da curva, *i.e.*

$$s = \int_0^s ds' \left| \frac{d\vec{x}(\varphi(s'), z(s'))}{ds'} \right| \quad ,$$

e determine o raio de curvatura desta curva no ponto $\varphi = z = 0$.

c. Considere uma outra curva na superfície, dada por $\varphi(s) = \frac{1}{2}s$ e $z(s) = 0$. Determine o raio de curvatura desta curva no ponto $\varphi = z = 0$.

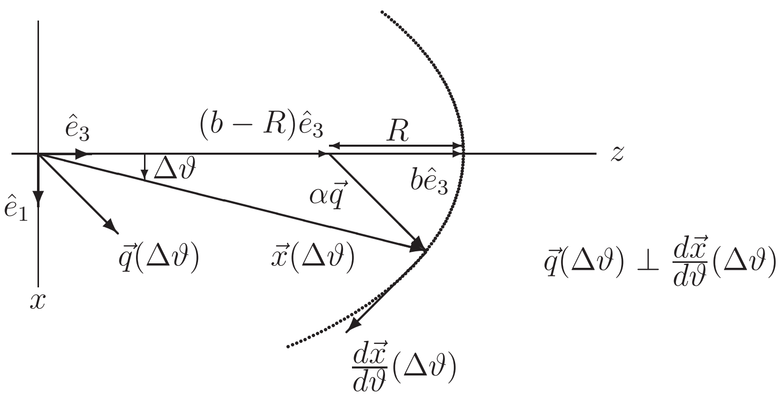
d. Considere ainda uma outra curva na superfície, dada por $\varphi(s) = 0$ e $z(s) = s$. Determine também o raio de curvatura desta curva no ponto $\varphi = z = 0$.

e. Que pode concluir sobre a curvatura da superfície em causa?

10. Considere num espaço tridimensional com base cartesiana ortonormal $\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$ e $\hat{e}_3 = \hat{z}$, uma elipse no plano xz de equações paramétricas dadas por:

$$\vec{x}(\vartheta) = a\sin(\vartheta)\hat{e}_1 + b\cos(\vartheta)\hat{e}_3 \quad .$$

Para determinar a curvatura da elipse no ponto $\vec{x}(\vartheta = 0) = b\hat{e}_3$, considere a seguinte figura:



a. O vector $\vec{q}(\Delta\vartheta)$ representa um vector perpendicular ao vector tangente $d\vec{x}/d\vartheta$ no ponto $\vec{x}(\Delta\vartheta)$. Determine os dois vectores $d\vec{x}/d\vartheta$ e $\vec{q}(\Delta\vartheta)$.

b. Utilize a expansão até à primeira ordem em $\Delta\vartheta$ da seguinte relação vectorial

$$(b-R)\hat{e}_3 + \alpha\vec{q}(\Delta\vartheta) = \vec{x}(\Delta\vartheta) \quad ,$$

para determinar a constante de proporcionalidade α e o raio de curvatura R no ponto $b\hat{e}_3$.

11. Considere num espaço tridimensional com base cartesiana ortonormal $\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$ e $\hat{e}_3 = \hat{z}$, uma elipse no plano xz de equações paramétricas dadas por:

$$\vec{x}(\vartheta) = a\sin(\vartheta)\hat{e}_1 + b\cos(\vartheta)\hat{e}_3 \quad .$$

O objectivo deste problema é determinar o raio de curvatura da elipse num ponto arbitrário da mesma. No entanto, não é fácil encontrar uma expressão analítica $\vartheta(s)$ para o parametro ϑ em função do parametro do comprimento próprio s. Por este motivo:

a. Determine primeiro o vector tangente à elipse, $\vec{a}_\vartheta = d\vec{x}(\vartheta)/d\vartheta$ num ponto arbitrário da mesma.

b. Determine, a seguir, $\dfrac{d\vartheta(s)}{ds}$, utilizando

$$\vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{x}(\vartheta(s))}{ds} = \frac{d\vartheta(s)}{ds}\,\vec{a}_\vartheta \quad \text{e} \quad |\vec{\tau}(s)| = 1 \quad .$$

c. Finalmente, determine $|d\vec{\tau}/ds|$ e $\kappa = R^{-1}$, utilizando as fórmulas (124) e (129) da sebenta e a expressão:

$$\frac{d\vec{\tau}(s)}{ds} = \frac{d\vartheta(s)}{ds}\frac{d\vec{\tau}(s)}{d\vartheta} = \frac{d\vartheta(s)}{ds}\left[\left\{\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{d\vartheta(s)}{ds}\right)\right\}\vec{a}_\vartheta + \frac{d\vartheta(s)}{ds}\frac{d\vec{a}_\vartheta}{d\vartheta}\right] \quad .$$

d. Compare o resultado da alinea c.) para $\vartheta = 0$ com o raio de curvatura R obtido no problema anterior.

12. Considere num espaço tridimensional com base cartesiana ortonormal $\hat{e}_1 = \hat{x}$, $\hat{e}_2 = \hat{y}$ e $\hat{e}_3 = \hat{z}$, a superfície de um elipsóide de equações paramétricas dadas por:

$$\vec{x}(\vartheta, \varphi) = a\sin(\vartheta)\cos(\varphi)\hat{e}_1 + a\sin(\vartheta)\sin(\varphi)\hat{e}_2 + b\cos(\vartheta)\hat{e}_3 \quad .$$

a. Por razões de simetria é de esperar que, no ponto $\vec{x}(\vartheta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0) = \hat{e}_1$, as direcções principais do plano tangencial são dadas pela elipse no plano xz e pelo circulo no plano xy. Determine, utilizando os resultados do problema anterior, o valor do escalar de curvatura K no ponto $\vec{x} = \hat{e}_1$.

b. Determine a métrica da superfície.

c. Utilize o teorema Egrégio de Gauss (fórmula 186 da sebenta) para determinar a expressão geral do escalar de curvatura $K(\vartheta, \varphi)$ num ponto arbitrário da superfície.

13. Considere, numa aproximação em que a Terra é considerada uma esfera perfeita com raio de 6000 *km*, três localidades A, B e C com distâncias mútuas iguais e uma quarta localidade P, localizada no centro do triângulo equilatero formado por A, B e C. As distâncias AP, BP e CP, medidas ao longo da superfície da Terra, são todas 1200 *km*. (Repare que distâncias são medidas ao longo de geodésicas neste caso.)

a. Quais são as distâncias mútuas, medidas na superfície da Terra, de A, B e C?

b. Quais são as distâncias mútuas num mapa plano, feito de modo que A, B e C formam um triângulo equilatero, com P no seu centro, e as distâncias AP, BP e CP representam cada uma distâncias de 1200 *km*?

c. Qual é então o erro nas distâncias AP, BP e CP no mapa?

14. Considere uma superfície de duas dimensões encaixada em três dimensões e dada por:

$$\boldsymbol{x}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} R\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ R\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ R\cos(\vartheta) \end{pmatrix} ,$$

e um plano, que passa pela origem do espaço três dimensional, perpendicular ao vector $\boldsymbol{N} = p\hat{x} + q\hat{y} + r\hat{z}$.

a. Mostre, para pontos $\boldsymbol{x}(\vartheta, \varphi)$ da curva formada pela secção do plano com a superfície, a seguinte identidade no caso em que $\sin(\vartheta) \neq 0$,

$$p\ \cos(\varphi) + q\ \sin(\varphi) = -r\frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} \quad . \tag{7}$$

b. Considerando $\varphi = \varphi(\vartheta)$, determine da relação (7) a primeira e a segunda derivada na ordem de ϑ.

c. Mostre a relação seguinte:

$$\varphi''\frac{r}{\sin^2(\vartheta)} + (\varphi')^3\ r\frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} + 2\varphi'\ r\frac{\cos(\vartheta)}{\sin^3(\vartheta)} = 0 \quad . \tag{8}$$

15. Considere uma superfície tridimensional de espaço-tempo parametrizada pelas coordenadas t, r e φ. A coordenada t representa o tempo e r e φ as coordenadas cilíndricas do espaço. Seja a métrica nesta superfície dada por:

$$ds^2 = A(r)\, dt^2 \; - \; \frac{1}{A(r)}\, dr^2 \; - \; r^2\, d\varphi^2 \;\; .$$

a. Determine as equações geodésicas.

b. Mostre que as três seguintes expressões são constantes do movimento:

$$\tau = A(r)\frac{dt}{ds} \quad , \quad \ell = r^2\frac{d\varphi}{ds} \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{\tau^2}{A(r)} - \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{1}{A(r)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \quad .$$

c. Mostre que, se r é parametrizado por φ, obtém-se da equação geodésica para $r(\varphi)$ a expressão:

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{1}{A(r)}\left(\frac{\ell}{r^2}\right)^2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\left(\frac{\ell}{r^2}\right)^2 - \frac{1}{A(r)}\right\} = 0 \;\; .$$

d. Mostre que, para $A(r) = 1 - \frac{2MG}{r}$ e $\frac{2MG}{r} \ll 1$, tém-se

(i) $t \approx s$ (para $\tau = 1$ e constante da integração 0).

(ii) $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \approx \frac{\ell}{r^2}$.

(iii) $\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - 1 \approx \frac{MG}{\ell^2}r$.

e. Mostre que a solução para a equação diferencial (iii) é dada por:

$$r(\varphi) = \frac{\ell^2/MG}{1 - e\cos(\varphi)}$$

f. Faça esquemas das órbitas para $e = 0$, $e = 0.5$, $e = 1$ e $e = 2$.

16. Considere uma nave espacial que cai livremente na direcção do centro da Terra. Quatro objectos A, B, C e D flutuam livremente no interior da nave. No instante $t = 0$ as velocidades dos quatro objectos são igual a zero relativamente à nave.

a. A e B caiem ao longo da mesma direcção radial, A a uma distância Δr por cima de B. Mostre que, em primeira ordem em Δr, a diferença em aceleração gravítica para A e B é dada por

$$g_B - g_A = 2GM\frac{\Delta r}{r^3} \quad .$$

b. Ignorando o facto que r não é constante e utilizando a relação $(GM/R) = 10m/s^2$ (G, M e R representam, respectivamente, a constante gravitacional, a massa e o raio da Terra), determine a distância entre A e B no instante $t = 1000s$, se no instante $t = 0$ a nave espacial se encontra a uma distância de $r = 3R$ da Terra e $\Delta r(t = 0) = 1,00m$.

c. C e D caiem ao longo de direcções radiais diferentes separados de uma distância Δx, mas têm a mesma distância relativamente ao centro da Terra. Mostre que, em primeira ordem em Δx, ambos C e D sentem acelerações, um na direcção do outro, dadas por:

$$g_C = g_D = \frac{1}{2}GM\frac{\Delta x}{r^3} \quad .$$

d. Determine, nas mesmas condições formuladas em b.), a distância entre C e D no instante $t = 1000s$.

17. Considere um objecto em movimento livre no espaço definido no problema (15), ao longo duma trajectória dada por fórmula (15e) para um valor muito elevado do parámetro e (*i.e.* $e \gg 1$).

a. Utilizando o esquema da órbita para $e = 2$ da solução (15e) da equação do movimento (15diii), defina o ângulo de desvio $\Delta\varphi$ e determine como está relacionado com os ângulos $\varphi(t \to -\infty)$ e $\varphi(t \to +\infty)$.

b. Mostre que, para $e \gg 1$, se tem:

$$\varphi(t \to -\infty) = \varphi(t \to +\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e} \quad .$$

c. Ainda para $e \gg 1$, determine a relação entre ℓ^2/MG, e, e a distância mínima r_0 entre o objecto e a fonte do campo gravítico.

d. Utilizando (15dii), determine a relação entre r_0 e ℓ e a velocidade v_0 do objecto no ponto r_0.

e. Utilizando o facto de que no ponto r_0 se verifica $dr/ds = 0$, mostre que no caso em que $2MG/r_0 \ll 1$, a energia total E do objecto é dada por $E = m(1-\epsilon)/2$.

f. A velocidade da luz é igual a $c = 1$. Determine o valor "semi-clássico" de $\Delta\varphi$ para um fotão no campo gravítico do sol.

18. Mostre que as soluções das equações geodésicas (15b) para $\tau = 1$ podem ser determinadas pela seguinte quadratura:

$$\varphi(r) = \int dr \, \frac{1}{r^2\sqrt{A(r)\left(\frac{1}{\ell^2 A(r)} - \frac{\epsilon}{\ell^2} - \frac{1}{r^2}\right)}} \quad .$$

19. Para fotões tem-se $\epsilon = 0$.

a. Mostre, utilizando os resultados dos problemas (17) e (18), que para fotões se verifica:

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty dr \, \frac{1}{r\sqrt{A(r)}\sqrt{\frac{A(r_0)}{A(r)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \quad .$$

b. e mostre que $\Delta\varphi = 2\,|\varphi(r_0) - \varphi(\infty)| - \pi$.

c. No caso em que $2MG/r_0 \ll 1$, mostre que

$$\varphi(r_0) - \varphi(\infty) = \int_{r_0}^\infty dr \, \frac{1 + \frac{MG}{r} + \frac{MGr}{r_0(r + r_0)}}{r\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \quad .$$

d. Determine $\Delta\varphi$ em primeira ordem em MG/r_0.
Se fôr preciso, utilize as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr} \arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) &= -\frac{1}{r\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \quad , \\
\frac{d}{dr} \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} &= \frac{r_0}{r^2\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \quad , \quad \text{e} \\
\frac{d}{dr} \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} &= r_0(r - r_0)^{-1/2}(r + r_0)^{-3/2} \quad .
\end{aligned}$$

e. Determine o valor deste desvio para um fotão no campo gravítico do sol no caso em que r_0 é igual ao raio do sol.

20. Para um espaço sem campos gravíticos, seja ds dado por:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - d\vec{r}^{\,2} \quad .$$

Considere neste espaço a seguinte corrente $J^\mu(x)$ de um conjunto de partículas carregadas (carga q_n, tetra-vector de posição $x_n(t(s))$, com $x_n^0(t(s)) = t(s)$, $n = 1, 2, \ldots$):

$$J^\mu(x) = \int ds \sum_n q_n \delta^{(4)}(x - x_n(s)) \frac{dx^\mu}{ds} \quad .$$

a. Mostre que $J^\mu(x)$ é um tetra-vector sob transformações de Lorentz.

b. e mostre que $\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu(x) = 0$.

21. A carga total do conjunto de partículas do problema anterior é dada por:

$$Q = \int d^3x \; J^0(x) \quad .$$

Mostre que $\dfrac{dQ}{dt} = 0$.

22. Considere num espaço sem campos gravíticos uma força "relativística" f^μ actuando numa partícula com massa m, dada por:

$$f^\mu = m \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \quad .$$

a. Mostre que f^μ é um tetra-vector sob transformações de Lorentz.

b. Se, num certo sistema de coordenadas, a partícula está em repouso momentáriamente, a força coincide com a força Newtoniana, *i.e.* $\vec{f} = \vec{F}$ e $f^0 = 0$. Mostre que, se a partícula tem instantaneamente uma velocidade $\vec{v}$, a força relativística é dada por ($\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}}$):

$$\vec{f}(\vec{v}) = \vec{F} + (\gamma - 1)\vec{v} \; \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{\vec{v}^{\,2}} \quad \text{e} \quad f^0(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{f} \quad .$$

23. Em analogia com a fórmula (188) da sebenta, o tensor de curvatura em qualquer dimensão é definido por:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}(x) = g_{\mu\alpha}(x) R^{\alpha}_{\ \nu\rho\sigma}(x) \quad , \quad \text{com}$$

$$R^{\alpha}_{\ \nu\rho\sigma} = \Gamma^{\alpha}_{\ \nu\rho,\,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\ \nu\sigma,\,\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\sigma}\,\Gamma^{\beta}_{\ \nu\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\rho}\,\Gamma^{\beta}_{\ \nu\sigma} \quad .$$

a. Mostre que

$$g_{\mu\sigma}\, g^{\sigma\nu}{}_{,\,\rho} = -g_{\mu\sigma,\,\rho}\, g^{\sigma\nu} = -g^{\sigma\nu}\left(g_{\alpha\sigma}\,\Gamma^{\alpha}_{\ \mu\rho} + g_{\alpha\mu}\,\Gamma^{\alpha}_{\ \sigma\rho}\right) \quad .$$

b. Mostre que

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\left\{ g_{\mu\rho,\,\nu,\,\sigma} - g_{\nu\rho,\,\mu,\,\sigma} - g_{\mu\sigma,\,\nu,\,\rho} + g_{\nu\sigma,\,\mu,\,\rho} \right\} + \\ &\quad + g_{\alpha\beta}\left\{ \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\rho}\,\Gamma^{\beta}_{\ \nu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\ \mu\sigma}\,\Gamma^{\beta}_{\ \nu\rho} \right\} \quad . \end{aligned}$$

c. Mostre que $R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0$.

d. Mostre que $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}$.

24.

a. Prove as relações de Bianchi, dadas por:

$$R_{\lambda\mu\nu\rho;\,\sigma} + R_{\lambda\mu\rho\sigma;\,\nu} + R_{\lambda\mu\sigma\nu;\,\rho} = 0 \quad .$$

b. Mostre que para a derivada covariante do tensor de Einstein, se obtém:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)_{;\,\mu} = 0 \quad .$$

25. Mostre que para um campo vectorial $V^{\mu}(x)$ num espaço com campo gravítico, é valido:

$$V^{\mu}{}_{;\,\nu;\,\rho} - V^{\mu}{}_{;\,\rho;\,\nu} = V^{\alpha} R^{\mu}_{\ \alpha\nu\rho} \quad .$$

26. Considere o espaço-tempo de uma certa distribuição da massa, parametrizado pelas coordenadas t, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$. A coordenada t representa o tempo e x^i $(i = 1, 2, 3)$ as coordenadas do espaço. Seja a métrica neste espaço dada por:

$$ds^2 = \frac{R^2}{R^2 - r^2}\left\{dt^2 - d\vec{x}\cdot d\vec{x} - \frac{1}{R^2 - r^2}\left(\vec{x}\cdot d\vec{x}\right)^2\right\} \quad (r < R).$$

R é uma constante e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

a. Mostre que, em coordenadas esféricas, r, ϑ e φ, dadas por $x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$ e $z = r\cos(\vartheta)$, a métrica toma a seguinte forma:

$$ds^2 = \frac{R^2}{R^2 - r^2}\left\{dt^2 - \frac{R^2 dr^2}{R^2 - r^2} - r^2\left(d\vartheta^2 + d\varphi^2\sin^2(\vartheta)\right)\right\} \quad .$$

b. Determine as equações geodésicas.

c. Mostre que, para trajectórias no plano $\theta = \pi/2$, as três seguintes expressões são constantes do movimento:

$$\tau = \frac{R^2}{R^2 - r^2}\frac{dt}{ds} \quad , \quad \ell = \frac{r^2}{R^2 - r^2}\frac{d\varphi}{ds} \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{r^2}{R^2} + \frac{\ell^2 R^4}{r^2\tau^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \quad .$$

d. Mostre (para $\ell = 0$) que as soluções das equações geodésicas representam movimentos oscilatórios.

e. Determine o escalar da curvatura desta métrica.

27. Considere uma superfície tridimensional de espaço-tempo parametrizada pelas coordenadas t, r e φ. A coordenada t representa o tempo e r e φ as coordenadas cilíndricas do espaço. Seja a métrica nesta superfície dada por:

$$ds^2 = A(r)\ dt^2\ -\ \frac{1}{A(r)}\ dr^2\ -\ r^2\ d\varphi^2\ \ . \tag{9}$$

Considere a métrica da fórmula (9).

a. Determine as equações geodésicas.

b. Mostre que as três seguintes expressões são constantes do movimento:

$$\tau = A(r)\frac{dt}{ds} \quad , \quad \ell = r^2\frac{d\varphi}{ds} \quad \text{e} \quad \epsilon = \frac{\tau^2}{A(r)} - \frac{\ell^2}{r^2} - \frac{1}{A(r)}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 \quad .$$

c. Mostre que, se r é parametrizado por φ, obtém-se da equação geodésica para $r(\varphi)$ a expressão:

$$\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{1}{A(r)}\left(\frac{\ell}{r^2}\right)^2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\left(\frac{\ell}{r^2}\right)^2 - \frac{1}{A(r)}\right\} = 0 \ \ .$$

28. Considere a métrica da fórmula (9).

a. Mostre que, para $A(r) = 1 - \frac{2MG}{r}$ e $\frac{2MG}{r} \ll 1$, têm-se

(i) $t \approx s$ (para $\tau = 1$ e constante da integração 0).

(ii) $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \approx \frac{\ell}{r^2}$.

(iii) $\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\varphi^2} - \frac{2}{r^2}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - 1 \approx \frac{MG}{\ell^2}r$.

b. Mostre que a solução para a equação diferencial (iii) é dada por:

$$r(\varphi) = \frac{\ell^2/MG}{1 - e\cos(\varphi)}$$

c. Faça um esquema da órbita para $e = 2$.

29. Considere a métrica da fórmula (9) e um objecto em movimento livre no espaço relacionado, ao longo duma trajectória dada por fórmula 2b) para um valor muito elevado do parámetro e (*i.e.* $e \gg 1$).

a. Utilizando o esquema da órbita para $e = 2$ da solução 2b) da equação do movimento 2aiii), defina o ângulo de desvio $\Delta\varphi$ e determine como está relacionado com os ângulos $\varphi(t \to -\infty)$ e $\varphi(t \to +\infty)$.

b. Mostre que, para $e \gg 1$, se tem:

$$\varphi(t \to -\infty) = \varphi(t \to +\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{e} \quad .$$

c. Ainda para $e \gg 1$, determine a relação entre ℓ^2/MG, e, e a distância mínima r_0 entre o objecto e a fonte do campo gravítico.

d. Utilizando 2aii), determine a relação entre r_0 e ℓ e a velocidade v_0 do objecto no ponto r_0.

e. Utilizando o facto de que no ponto r_0 se verifica $dr/ds = 0$, mostre que no caso em que $2MG/r_0 \ll 1$, a energia total E do objecto é dada por $E = m(1-\epsilon)/2$.

f. A velocidade da luz é igual a $c = 1$. Determine o valor "semi-clássico" de $\Delta\varphi$ para um fotão no campo gravítico do sol.

30. Mostre que as soluções das equações geodésicas para $\tau = 1$ podem ser determinadas pela seguinte quadratura:

$$\varphi(r) = \int dr \, \frac{1}{r^2 \sqrt{A(r) \left(\frac{1}{\ell^2 A(r)} - \frac{\epsilon}{\ell^2} - \frac{1}{r^2} \right)}} \quad .$$

31. Para fotões tem-se $\epsilon = 0$.

a. Mostre que para fotões se verifica:

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \int_r^\infty dr \, \frac{1}{r\sqrt{A(r)}\sqrt{\frac{A(r_0)}{A(r)}\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \quad .$$

b. e mostre que $\Delta\varphi = 2\,|\varphi(r_0) - \varphi(\infty)| - \pi$.

c. No caso em que $2MG/r_0 \ll 1$, mostre que

$$\varphi(r_0) - \varphi(\infty) = \int_{r_0}^\infty dr \, \frac{1 + \frac{MG}{r} + \frac{MGr}{r_0(r+r_0)}}{r\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \quad .$$

d. Determine $\Delta\varphi$ em primeira ordem em MG/r_0.
Se fôr preciso, utilize as seguintes expressões:

$$\frac{d}{dr}\arcsin\left(\frac{r_0}{r}\right) = -\frac{1}{r\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \quad ,$$

$$\frac{d}{dr}\sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} = \frac{r_0}{r^2\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1}} \quad , \quad \text{e}$$

$$\frac{d}{dr}\sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}} = r_0(r - r_0)^{-1/2}(r + r_0)^{-3/2} \quad .$$

e. Determine o valor deste desvio para um fotão no campo gravítico do sol no caso em que r_0 é igual ao raio do sol.

32. Considere uma matriz $n \times n$ não-singular A. Os elementos da matriz A são designados por $a_{\mu\nu}$ e os elementos da matriz A^{-1} por $a^{\mu\nu}$. O co-factor $A^{\mu\nu}$ do elemento da matriz $a_{\mu\nu}$ é dado pela determinante da matriz que resulta quando são omitidas a linha μ e a coluna ν da matriz A.

a Mostra que $a^{\mu\nu} = \dfrac{A^{\nu\mu}}{a}$, onde $a = \det(A)$.

b Deduz $a = a_{1\alpha}A^{1\alpha} = a_{2\alpha}A^{2\alpha} = \cdots = a_{n\alpha}A^{n\alpha}$.

c Mostra que $\dfrac{\partial a}{\partial a_{\mu\nu}} = a\, a^{\nu\mu}$

(d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, fórmula 7.7)

d Para a métrica $g_{\mu\nu}$ deduz a seguinte relação: $\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}$.

33. Considere uma matriz $n \times n$ não-singular A e uma transformação de semelhança S assim que SAS^{-1} tem a forma triangular. Os elementos da diagonal da matriz SAS^{-1} são designadas por λ_1, λ_2, ..., λ_n. Seja, sobretudo, $\exp(A)$ definido por (van Beveren, *Some notes on group theory*, capítulo 6, secção 6.2)

$$\exp(A) \;=\; \mathbf{1}_{n\times n} \;+\; A \;+\; \frac{1}{2!}A^2 \;+\; \cdots \quad .$$

a Mostrar $\exp\left(SAS^{-1}\right) = S\exp(A)S^{-1}$.

b Mostra que a matriz $\left[SAS^{-1}\right]^k$ tem forma triangular e que os elementos da diagonal da matriz são iguais a $(\lambda_1)^k$, $(\lambda_2)^k$, ... , $(\lambda_n)^k$.

c Mostra que a matriz $\exp\left(SAS^{-1}\right)$ tem forma triangular e que os elementos da diagonal da matriz são iguais a $\exp(\lambda_1)$, $\exp(\lambda_2)$, ... , $\exp(\lambda_n)$.

d Para a determinante da matriz $\exp(A)$ deduz

$$\det\left[\exp(A)\right] \;=\; \exp\left(\mathrm{Tr}(A)\right) \quad ,$$

onde $\mathrm{Tr}(A)$ representa o traço da matriz A.

34. (Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, capítulo 4, secção 4.7)

a Mostrar que $\log(\det(1+\epsilon A)) = \mathrm{Tr}(\epsilon A) + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right)$.

b Para um campo tensorial $M(x)$ de matrizes não-singulares, mostra que

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \log\left\{\det\left[M(x)\right]\right\} \; = \; \mathrm{Tr}\left\{M^{-1}(x)\, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\, M(x)\right\} \quad .$$

c Para a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ deduz a seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \log(g) \; = \; g^{\alpha\beta}(x)\; g_{\alpha\beta,\mu}(x) \quad .$$

d Para um campo vectorial $V^\mu(x)$ deduz a seguinte relação:

$$V^\mu(x);\mu \; = \; \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\;\left[\sqrt{g}\; V^\mu(x)\right] \quad .$$

35. Sob uma transformação geral das coordenadas, $\{x^\mu\} \to \{x'^\mu\}$, um tensor transforma conforme a seguinte relação

$$A^{\mu\nu\cdots}_{\rho\sigma\cdots} \;\longrightarrow\; A'^{\,\mu'\nu'\cdots}_{\,\rho'\sigma'\cdots} \;=\; A^{\mu\nu\cdots}_{\rho\sigma\cdots}\left(\frac{\partial x'^{\,\mu'}}{\partial x^\mu}\;\frac{\partial x'^{\,\nu'}}{\partial x^\nu}\;\cdots\right)\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^{\,\rho'}}\;\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\,\sigma'}}\;\cdots\right) \quad .$$

a Mostra que o símbolo de Christoffel $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ não transforma desta maneira e então não é um tensor.

b Mostra que a seguinte grandeza

$$\delta\,\Gamma^\mu_{\nu\sigma} \;=\; (\delta\, g^{\mu\alpha})\;\Gamma_{\alpha\nu\sigma} \;+\; \frac{1}{2}\, g^{\mu\alpha}\left\{(\delta\, g_{\alpha\nu})_{,\sigma} \;+\; (\delta\, g_{\alpha\sigma})_{,\nu} \;-\; (\delta\, g_{\nu\sigma})_{,\alpha}\right\} \quad .$$

é um tensor.

36. Mostra a identidade de Palatini

$$\delta\, R_{\mu\nu} \;=\; \left(\delta\,\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}\right)_{;\nu} \;-\; \left(\delta\,\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\right)_{;\sigma} \quad .$$

37. A partir da invariancia sob transformações gerais das coordenadas da acção seguinte

$$I[X] \;=\; m \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma \sqrt{g_{\mu\nu}\left(X(\sigma)\right) \frac{dX^{\mu}(\sigma)}{d\sigma} \frac{dX^{\nu}(\sigma)}{d\sigma}} \quad ,$$

mostra que

$$T^{\mu}_{\alpha;\,\mu} \;=\; 0 \quad ,$$

onde o tensor $T^{\mu\nu}(x)$ se defina por

$$\sqrt{g(x)}T^{\mu\nu}(x) \;=\; m \int d\tau \, \frac{dX^{\mu}}{d\tau} \frac{dX^{\nu}}{d\tau} \delta^{(4)}(x-X) \quad .$$

38. Demostra a regra de Leibniz para a derivada covariante, *i.e.* (por exemplo)

$$\left[A^{\mu}_{\nu}(x)\; B^{\rho}(x)\right]_{;\,\sigma} \;=\; A^{\mu}_{\nu}(x)_{;\,\sigma}\; B^{\rho}(x) \;+\; A^{\mu}_{\nu}(x)\; B^{\rho}(x)_{;\,\sigma} \quad .$$

39. Uma *isometria* é uma transformação geral das coordenadas $x \to x'$ sob qual a forma da métrica $g_{\mu\nu}(x)$ é invariante, *i.e.* $g'_{\mu\nu}(x) \;=\; g_{\mu\nu}(x)$.
Considere a seguinte isometria infinitesimal

$$x'^{\mu} \;=\; x^{\mu} \;+\; \epsilon\, \xi^{\mu}(x) \;+\; \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) \quad .$$

Mostra que

a $\quad g_{\mu\nu,\,\rho}\, \xi^{\rho} \;+\; g_{\mu\nu'}\, \xi^{\nu'}_{,\,\nu} \;+\; g_{\mu'\nu}\, \xi^{\mu'}_{,\,\mu} \;=\; 0 \quad ,$

b $\quad \left(g_{\mu\rho}\, \xi^{\rho}\right)_{;\,\nu} \;+\; \left(g_{\nu\rho}\, \xi^{\rho}\right)_{;\,\mu} \;=\; 0 \quad , \quad$ e

c $\quad \left(g_{\sigma\alpha}\, \xi^{\alpha}\right)_{;\,\nu;\,\mu} \;=\; -R^{\;\;\;\;\rho}_{\mu\nu\sigma} \left(g_{\rho\alpha}\, \xi^{\alpha}\right) \quad .$

40. Para transformações infinitesimais, mostra que são isometrias do espaço-tempo Minkowskiano as transformações de Poincaré, ou seja translações espaciais e temporais e transformações de Lorentz (rotações e *boosts*).

41. Considere um conjunto de quatro campos escalares $X^{(0)}(x)$, $X^{(1)}(x)$, $X^{(2)}(x)$ e $X^{(3)}(x)$ escolhidos para servir de coordenadas do nosso espaço-tempo. Seja $g_{\mu\nu}(X)$ a métrica para estas coordenadas.
Mostra que a propriedade

$$\left(g^{\mu\nu}\, X^{(\rho)}_{\;;\,\mu}\right)_{;\,\nu} = 0 \quad ,$$

implica

$$\left(\sqrt{g}\; g^{\mu\nu}\right)_{,\,\nu} = 0 \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu}\, \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = 0 \quad .$$

Nos próximos quatro problemas apresentamos, para uma variedade de sistemas de coordenadas, a métrica em torno de uma distribuição esférica de massa, a partir da solução de Schwarzschild, dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)\, dt^2 \; - \; \left[1 - \frac{r_S}{r}\right]^{-1}\, dr^2 \; - \; r^2\, d\Omega^2 \qquad \text{com } r_S = 2MG \quad ,$$

nas coordenadas $(t, r, \vartheta, \varphi)$.
Deriva as expressões indicadas e faz esquemas do tipo (t, r) para cada uma das métricas, indicando a forma do cone de luz (para luz radial) nos sítios mais relevantes.

42. Nas coordenadas *Tortoise*, dadas por

$$t \; , \; r^* \; = \; r \; + \; r_S\, \log\left|\frac{r}{r_S} \; - \; 1\right| \; , \; \vartheta \; , \; \varphi \quad ,$$

a métrica é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r\,(r^*)}\right)\, \left\{dt^2 \; - \; dr^{*2}\right\} \; - \; r^2\,(r^*)\; d\Omega^2 \quad .$$

43. Nas coordenadas de Eddington e Finkelstein (1924), dadas por

a $(\tilde{v} \; = \; t \; + \; r^* \; , \; r \; , \; \vartheta \; , \; \varphi)$ a métrica é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \; d\tilde{v}^2 \; - \; (d\tilde{v}dr \; + \; drd\tilde{v}) \; - \; r^2 \, d\Omega^2 \quad .$$

b $(\tilde{u} \; = \; t \; - \; r^* \; , \; r \; , \; \vartheta \; , \; \varphi)$ a métrica é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) \; d\tilde{u}^2 \; + \; (d\tilde{u}dr \; + \; drd\tilde{u}) \; - \; r^2 \, d\Omega^2 \quad .$$

b $(\tilde{u} \; , \; \tilde{v} \; , \; \vartheta \; , \; \varphi)$ a métrica é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r\,(\tilde{u}, \tilde{v})}\right) \; d\tilde{u}d\tilde{v} \; - \; r^2\,(\tilde{u}, \tilde{v}) \; d\Omega^2 \quad .$$

d Mostra que em ambos os casos a) e b) se tem $\det(g) = -r^4 \sin^2(\vartheta)$.

44. Nas coordenadas, dadas por

$$v' \; = \; e^{\tilde{v}/2r_S} \; , \; u' \; = \; e^{-\tilde{u}/2r_S} \; , \; \vartheta \; , \; \varphi \quad ,$$

a métrica é

$$ds^2 = \frac{4r_S^3}{r\,(u', v')} \; dv'du' \; - \; r^2\,(u', v') \; d\Omega^2 \quad .$$

45. Nas coordenadas de Kruskal (1960), dadas por

$$u \; = \; \frac{1}{2}\,(v' \; - \; u') \; , \; v \; = \; \frac{1}{2}\,(v' \; + \; u') \; , \; \vartheta \; , \; \varphi \quad ,$$

a métrica é

$$ds^2 = \frac{4r_S^3}{r\,(u, v)} \; e^{-r\,(u, v)\,/r_S} \; \left(dv^2 \; - \; du^2\right) \; - \; r^2\,(u, v) \; d\Omega^2 \quad .$$

46. Para um espaço bidimensional, cuja métrica é dada por

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \ ,$$

determina a constante da curvatura e mostra que as geodésicas são dadas por

$$r^2 = s^2 + \ell^2 \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\ell a + sb}{\ell b - sa} \ .$$

Indica o significado das constantes a, b e ℓ.

47. Considera um campo gravítico no espaço-tempo dado pela métrica $g_{\mu\nu}$ e ainda uma isometria $\xi^\mu(x)$. Mostra que

$$\epsilon = -g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \quad \text{e} \quad \xi_\mu(x) \frac{dx^\mu}{ds}$$

são constantes do movimento.

48. Considera um campo gravítico no espaço-tempo de uma distribuição esférica simétrica de massa M, dada por

$$ds^2 = A(r)\, dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} - r^2 \left\{ d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)\, d\varphi^2 \right\} \quad ; \quad A(r) = 1 - \frac{2MG}{r} \ .$$

Os elementos da conexão afim que não se anulam são os seguintes

$$\Gamma^t_{\ tr} = \Gamma^t_{\ rt} = -\Gamma^r_{\ rr} = \frac{A'(r)}{2A(r)} \ , \quad \Gamma^r_{\ tt} = \tfrac{1}{2} A(r) A'(r) \ , \quad \Gamma^r_{\ \vartheta\vartheta} = -rA(r) \ ,$$

$$\Gamma^r_{\ \varphi\varphi} = -r\sin^2(\vartheta) A(r) \ , \quad \Gamma^\vartheta_{\ r\vartheta} = \Gamma^\vartheta_{\ \vartheta r} = \Gamma^\varphi_{\ r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\ \varphi r} = \frac{1}{r} \ ,$$

$$\Gamma^\vartheta_{\ \varphi\varphi} = -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \quad \text{e} \quad \Gamma^\varphi_{\ \vartheta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\ \varphi\vartheta} = \mathrm{cotg}(\vartheta) \quad ; \quad A'(r) = \frac{dA(r)}{dr} \ .$$

Determina o vector posição $r(t)$ de um fotão radialmente em queda livre a distâncias $r > 2MG$.

49. Indica três dos princípios que conduzam à formulação da equação de Einstein para um campo gravítico no espaço-tempo. Descreve o significado de cada um destes três dos princípios.

50. Considere um Universo isotrópico que consiste de poeira localmente em repouso. O raio instantâneo e a densidade deste Universo são respectivamente designados por $a(t)$ e $\rho(t)$; o seu tensor da energia-momento é dado por

$$T^{00} = \rho(t)\, g^{00} \qquad \text{e} \qquad T^{0i} = T^{i0} = T^{ij} = 0 \quad (i,j = 1,2,3),$$

onde a métrica obedece

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\{a(t)\}^2}{1+r^2}\, d\vec{r}^{\,2} \quad .$$

$r^2 = \delta_{k\ell} x^k x^\ell$ e $d\vec{r}^{\,2} = \delta_{ij} dx^i dx^j$.

a Demonstra as seguintes relações ($\dot{a}(t) = da(t)/dt$ e $\ddot{a}(t) = d^2a(t)/dt^2$):

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{a(t)\dot{a}(t)}{1+r^2}\,\delta_{ij} \quad , \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\,\delta^i_j \quad ,$$

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{1}{1+r^2}\left\{\left(\delta^i_j\delta_{k\ell} + \delta^i_k\delta_{j\ell}\right) x^\ell - x^i\,\delta_{jk}\right\} \quad ,$$

$$R_{00} = \frac{3\ddot{a}(t)}{a(t)} \quad , \quad R_{ij} = -\frac{\delta_{ij}}{1+r^2}\left\{2 + 2\dot{a}^2(t) + \ddot{a}(t)a(t)\right\} \quad .$$

b Mostra também que

$$\dot{a}^2(t) + 1 = \frac{8\pi G}{3}\,\rho(t)\, a^2(t) \quad .$$

c Define a variável $\eta(t)$ de modo a que $dt = a(t)d\eta$ e procura para $a(t)$ soluções cicloidais da equação da alinea **b**.

51. Considere um campo gravítico no espaço-tempo de uma distribuição esférica simétrica de massa M, dada por

$$ds^2 \;=\; A(r)\, dt^2 - \frac{dr^2}{A(r)} - r^2 \left\{ d\vartheta^2 \;+\; \sin^2(\vartheta)\, d\varphi^2 \right\} \quad ; \quad A(r) = 1 - \frac{2MG}{r} \quad .$$

Os elementos da conexão afim que não se anulam são os seguintes

$$\Gamma^{t}_{\;tr} = \Gamma^{t}_{\;rt} = -\Gamma^{r}_{\;rr} = \frac{A'(r)}{2A(r)} \quad , \quad \Gamma^{r}_{\;tt} \;=\; \tfrac{1}{2} A(r) A'(r) \quad , \quad \Gamma^{r}_{\;\vartheta\vartheta} \;=\; -rA(r) \quad ,$$

$$\Gamma^{r}_{\;\varphi\varphi} \;=\; -r\sin^2(\vartheta) A(r) \quad , \quad \Gamma^{\vartheta}_{\;r\vartheta} \;=\; \Gamma^{\vartheta}_{\;\vartheta r} \;=\; \Gamma^{\varphi}_{\;r\varphi} \;=\; \Gamma^{\varphi}_{\;\varphi r} \;=\; \frac{1}{r} \quad ,$$

$$\Gamma^{\vartheta}_{\;\varphi\varphi} \;=\; -\sin(\vartheta)\cos(\vartheta) \quad \text{e} \quad \Gamma^{\varphi}_{\;\vartheta\varphi} \;=\; \Gamma^{\varphi}_{\;\varphi\vartheta} \;=\; \text{cotg}(\vartheta) \quad ; \quad A'(r) = \frac{dA(r)}{dr} \; .$$

Determine o tensor da "energia-momento" e em particular na origem do sistema das coordenadas.

52. Para a seguinte acção

$$I\left(g^{\mu\nu}\right) \;=\; \int d^4x\, \sqrt{g(x)}\, R(x) \quad ,$$

onde $g(x)$ e $R(x)$ representam o determinante e o escalar da curvatura da métrica $g^{\mu\nu}(x)$, mostre que

$$\delta I \;=\; -\int d^4x\, \sqrt{g(x)}\, \left(R^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x) R(x) \right) \delta g_{\mu\nu} \quad .$$

53. Considere um espaço sem forças gravíticas e uma fonte de luz (frequência f) em movimento (velocidade $\vec{v}$) relativamente a um observador em repouso. Determine uma expressão para a frequência f' da luz medida pelo observador.

54. Utilizando coordenadas de Kruskal para um buraco negro, mostre que o tempo próprio usado até chegar à singularidade $r = 0$ a partir da singularidade de Schwarzschild r_S é inferior ou igual a $\frac{\pi}{2}\, r_S$.

55. Considere um campo gravítico fraco e estático no espaço-tempo dada por

$$ds^2 \;=\; [1 + 2\Phi\,(\vec{x}\,)]\;\, dt^2 \;-\; [1 - 2\Phi\,(\vec{x}\,)]\;\, d\vec{x}^{\,2} \quad .$$

Para objectos com velocidades muitas inferiores à velocidade de luz mostre que

$$\frac{d^2\,\vec{x}}{dt^2} \;=\; -\bigtriangledown\;\, \Phi\,(\vec{x}\,) \quad .$$