TRANSIÇÕES DE FASE E TEORIA DE GRUPOS (2008-2009)

entregar	segunda feira 6/10	(gabinete D43)
discussão	terça feira 7/10	(sala D8)

1. A definição e construção da forma ortogonal padrão de Young das representações irredutíveis dos grupos simétricos S_n são tratadas no capítulo 3 da sebenta. Determina as matrizes da forma ortogonal padrão de Young da representação irredutível [32] do grupo S_5 para uma representante da cada classe de equivalência.

2. Considere um vector $\vec{n}$ e uma matriz L dados por:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

a Mostre que $L^3 = -n^2 L$ com $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$.

b Determine $M = \exp(L)$.

c Mostre que $M\vec{n} = \vec{n}$.

3. Considere o vector $\vec{n}$ e a matriz L do problema (2) e ainda dois outros vectores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dados por:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} n_2 - n_3 \\ n_3 - n_1 \\ n_1 - n_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} \{n_2(n_1 - n_2) + n_3(n_1 - n_3)\}/n \\ \{n_3(n_2 - n_3) + n_1(n_2 - n_1)\}/n \\ \{n_1(n_3 - n_1) + n_2(n_3 - n_2)\}/n \end{pmatrix} \quad .$$

a Mostre que $|\vec{v}| = |\vec{w}|$ e que $\vec{n}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais.

b Mostre as seguintes identidades e interprete-lhas:

$$M\vec{v} = \vec{v}\cos(n) + \vec{w}\sin(n) \quad \text{e} \quad M\vec{w} = -\vec{v}\sin(n) + \vec{w}\cos(n) \quad .$$

4. Seja um número complexo $a + ib$ representado por um vector coluna $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ e seja $D^{(k)}$ uma representação irredutível do grupo $SO(2)$. Determine a matriz que representa a transformação $D^{(k)}(\alpha)$ no plano complexo.

5. O caracter $\vec{\chi}$ de uma representação de um grupo finito é representado por um vector coluna com um número de componentes igual ao número de elementos do grupo (ver fórmula 4.17 da sebenta). O produto interior dos caracteres é definido na fórmula 4.18 da sebenta.

a Determine uma generalização destes conceitos para o grupo $SO(2)$ e mostre que as definições obtidas estão de acordo com $(\vec{\chi}^{(k_1)}, \vec{\chi}^{(k_2)}) = 2\pi\delta_{k_1 k_2}$.

b Determine também o produto interior entre $\vec{\chi}^{(k)}$ e o caracter da representação definição de $SO(2)$.