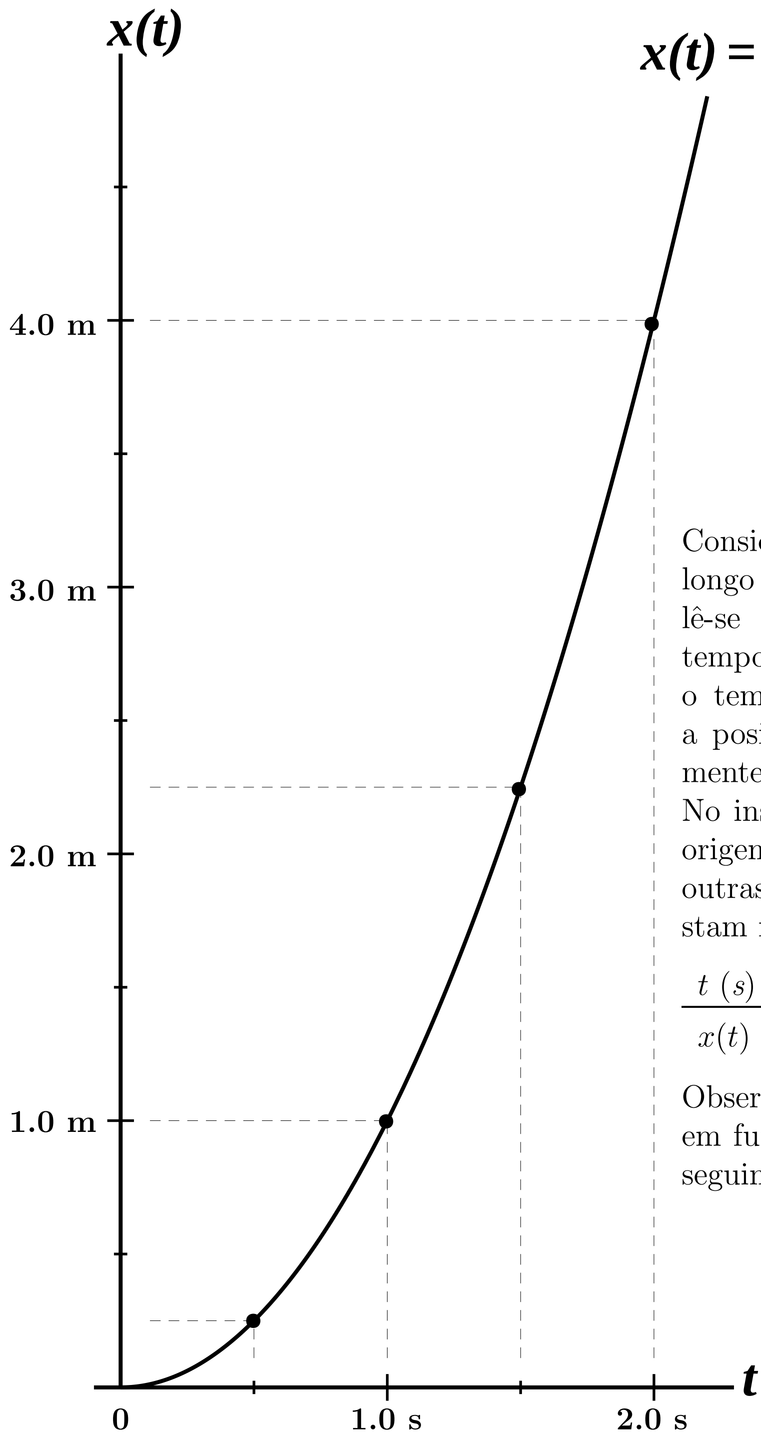
Matemática instantânea

Eef van Beveren
Departamento de Física
Universidade de Coimbra (Portugal)

17 de Dezembro de 2008



Considere um objecto que se desloca ao longo do eixo dos XX. No gráfico ao lado lê-se a posição do objecto em função do tempo. No eixo horizontal está representado o tempo (em segundos) e no eixo vertical a posição (em metros) do objecto relativamente à origem do eixo dos XX.
No instante $t = 0$ o objecto encontra-se na origem do eixo dos XX. Esta e algumas outras posições instantâneas do objecto constam na tabela seguinte.

t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0
$x(t)$ (m)	0	0,25	1,00	2,25	4,00

Observe que o movimento do objecto, $x(t)$, em função do tempo, t, é bem descrito pela seguinte fórmula

$$x(t) \ = \ t^2 \ .$$

O objectivo do presente estudo é a determinação da velocidade instantânea do objecto no instante t. Para começar vamos determinar a velocidade do objecto no instante $t = 1s$.

Uma primeira observação é a seguinte: O objecto desloca-se no intervalo de tempo $[0s,\ 1s]$ da posição $x = 0m$ até a posição $x = 1m$, ou seja com uma velocidade média de $1m/s$. No entanto, no intervalo de tempo $[1s,\ 2s]$ o objecto desloca-se de $x = 1m$ até $x = 4m$, ou seja com uma velocidade média de $3m/s$. Portanto, a velocidade média do objecto é igual a $1m/s$ num intervalo de tempo, de um segundo, imediatemente antes do instante $t = 1s$ e igual a $3m/s$ num intervalo de tempo, também de um segundo, imediatemente a seguir do instante $t = 1s$. Podemos, então, tirar a conclusão que a velocidade instantânea no instante $t = 1s$ tem provavelmente um valor entre $1m/s$ e $3m/s$.

Em vez de estudar a velocidade média, antes e a seguir ao instante $t = 1s$, em intervalos de tempo de 1 segundo, podemos estudar as velocidades médias em intervalos de tempo mais curtos. Por exemplo, em intervalos de tempo de meio segundo, ou de um quarto de um segundo, ou em intervalos ainda mais pequenos. Os resultados destes estudos deixam-se resumir da seguinte forma:

Considere o intervalo de tempo $[1 - \Delta t,\ 1]$, o que para $\Delta t > 0$, representa um intervalo de tempo imediatemente antes do instante $t = 1s$ e com uma duração de tempo de Δt. A velocidade média, $\bar{v}\left([1 - \Delta t,\ 1]\right)$, neste intervalo de tempo é igual ao deslocamento do objecto durante este intervalo de tempo dividido pela duração deste intervalo de tempo. O deslocamento do objecto no intervalo de tempo em causa é igual à diferença entre a posição do objecto no instante final, *i.e.* $x(1)$, e a posição do objecto no instante inícial, *i.e.* $x(1 - \Delta t)$, ou seja

$$\text{deslocamento} \ = \ x(1) - x(1 - \Delta t) \quad .$$

Então, para a velocidade média temos a seguinte fórmula:

$$\bar{v}\left([1 - \Delta t,\ 1]\right) \ = \ \frac{x(1) - x(1 - \Delta t)}{\Delta t} \ = \ \frac{1 - (1 - \Delta t)^2}{\Delta t} \ = \ 2 - \Delta t \ .$$

Tendo por base esta fórmula pode-se facilmente construir uma tabela de velocidades médias para intervalos de tempo de duração de Δt, sucessivamente mais pequenos

$\Delta t\ (s)$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$\bar{v}\ (m/s)$	1	1,9	1,99	1,999	1,9999	1,99999

Observa-se que à medida que a duração, Δt, do intervalo de tempo diminui, a velocidade média aproxima-se de $2{,}00m/s$, sendo no entanto, sempre inferior a esta velocidade limite.

Para intervalos de tempo imediatemente a seguir ao instante $t = 1s$ temos o seguinte:

A velocidade média num intervalo de tempo imediatemente a seguir do instante $t = 1s$ é igual ao deslocamento do objecto durante este intervalo de tempo dividido pela duração deste intervalo de tempo, ou seja:

$$\bar{v}\left([1,\ 1 + \Delta t]\right) \ = \ \frac{x(1 + \Delta t) - x(1)}{\Delta t} \ = \ \frac{(1 + \Delta t)^2 - 1}{\Delta t} \ = \ 2 + \Delta t \ .$$

Baseada nesta fórmula obtem-se a seguinte tabela de velocidades médias para intervalos de tempo de duração de Δt:

$\Delta t\ (s)$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$\bar{v}\ (m/s)$	3	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001

Observa-se agora que à medida que a duração, Δt, do intervalo de tempo diminui, a velocidade média aproxima-se de 2,00m/s, desta vez por valores superiores a esta velocidade limite.

Este estudo revela então, que a velocidade do objecto no instante $t = 1s$ deve ser igual a 2,00m/s, ou seja

$$v(1) \ = \ 2,00 m/s \quad .$$

Mas mais importante ainda, o nosso estudo mostra como chegar a este resultado.

Para um instante arbitrário, t, podemos determinar a velocidade instantânea do objecto considerando intervalos de tempo dados por

$$[t,\ t + \Delta t]$$

e estudando o limite das velocidades médias nestes intervalos de tempo caso Δt tenda para zero. Portanto,

$$\bar{v}\left([t,\ t+\Delta t]\right) \ = \ \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \ = \ \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \ = \ 2t + \Delta t \ .$$

Tomando aqui o limite $\Delta t \to 0$ chegamos à velocidade instantânea no instante t, ou seja

$$v(t) \ = \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \ = \ \lim_{\Delta t \to 0} (2t + \Delta t) \ = \ 2t \ .$$

A este limite chama-se a *derivada* da função $x(t)$ em ordem de t, e é indicado por $dx(t)/dt$, ou seja

$$\frac{dx(t)}{dt} \ = \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \ .$$

Portanto, chegamos à seguinte relação para a velocidade instantânea do objecto

$$v(t) \ = \ \frac{dx(t)}{dt} \ .$$

Exemplos

1. $x(t) = t^3$

Se o movimento de um objecto em função do tempo é descrito pela função $x(t) = t^3$, então, a velocidade média no intervalo de tempo $[t,\ t + \Delta t]$ é dada pela seguinte expressão

$$\bar{v}\left([t,\ t+\Delta t]\right) \;=\; \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \;=\; \frac{(t+\Delta t)^3 - t^3}{\Delta t} \;=\; 3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2 \ .$$

Tomando nesta expressão o limite $\Delta t \to 0$ chegamos à velocidade instantânea do objecto no instante t, ou seja

$$v(t) \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \left(3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2\right) \;=\; 3t^2 \;=\; \frac{dt^3}{dt} \ .$$

2. $x(t) = At^2 + Bt + C$

Se o movimento de um objecto em função do tempo é descrito pela função $x(t) = At^2 + Bt + C$, onde A, B e C representam constantes relacionadas respectivamente com a aceleração, a velocidade inicial e a posição inicial do objecto, então, verifica-se para a velocidade média no intervalo de tempo $[t,\ t + \Delta t]$ a seguinte expressão

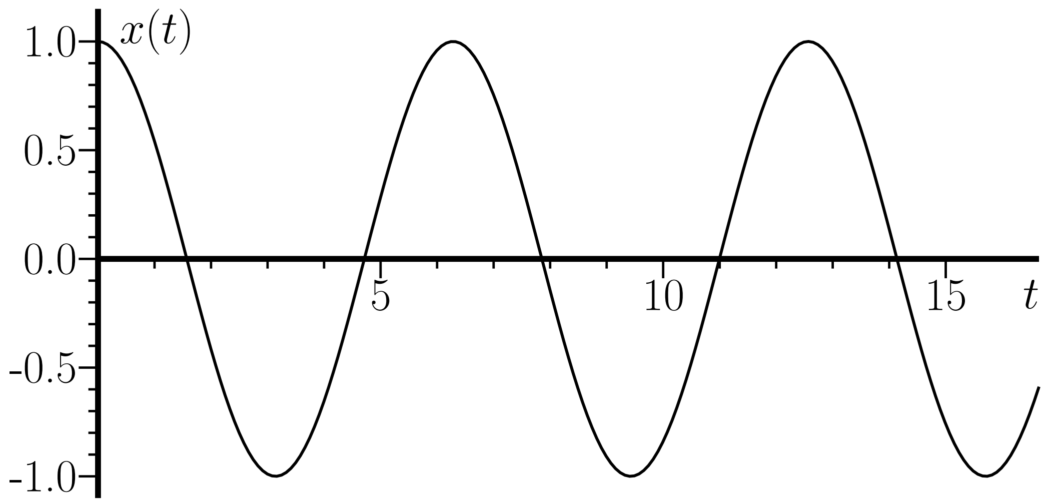
$$\begin{aligned}
\bar{v}\left([t,\ t+\Delta t]\right) \;&=\; \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\
&=\; \frac{A(t+\Delta t)^2 + B(t+\Delta t) + C - (At^2 + Bt + C)}{\Delta t} \\
&=\; A(2t + \Delta t) + B \ .
\end{aligned}$$

Tomando nesta expressão o limite $\Delta t \to 0$ chegamos à velocidade instantânea do objecto no instante t, ou seja

$$v(t) \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \left(A(2t + \Delta t) + B\right) \;=\; 2At + B \;=\; \frac{d\left(At^2 + Bt + C\right)}{dt} \ .$$

3. $x(t) = \cos(t)$

Neste caso descreve-se a posição em função de tempo de um objecto que tem um movimento oscilatório; por exemplo, uma massa ligada a uma mola. Um intervalo de tempo de 1 segundo corresponde a um ângulo de 1 radiano ($1 rad \approx 57{,}3°$). O gráfico seguinte mostra a variação da posição do objecto em função do tempo.



Para as velocidades médias nos intervalos de tempo $[t,\ t+\Delta t]$ verifica-se neste caso a seguinte expressão

$$\bar{v}\left([t,\ t+\Delta t]\right) \ = \ \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \ = \ \frac{\cos(t+\Delta t) - \cos(t)}{\Delta t} \ .$$

Para a expressão $\cos(t+\Delta t)$ utilizamos a seguinte identidade goniométrica

$$\cos(t+\Delta t) \ = \ \cos(t)\cos(\Delta t) - \sin(t)\sin(\Delta t) \ .$$

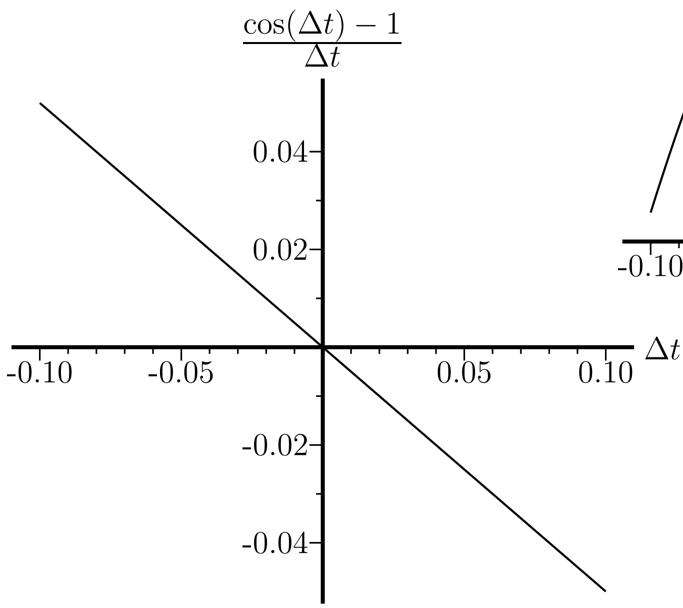
Substituindo esta identidade na expressão para as velocidades médias do objecto nos intervalos $[t,\ t+\Delta t]$, obtemos a relação

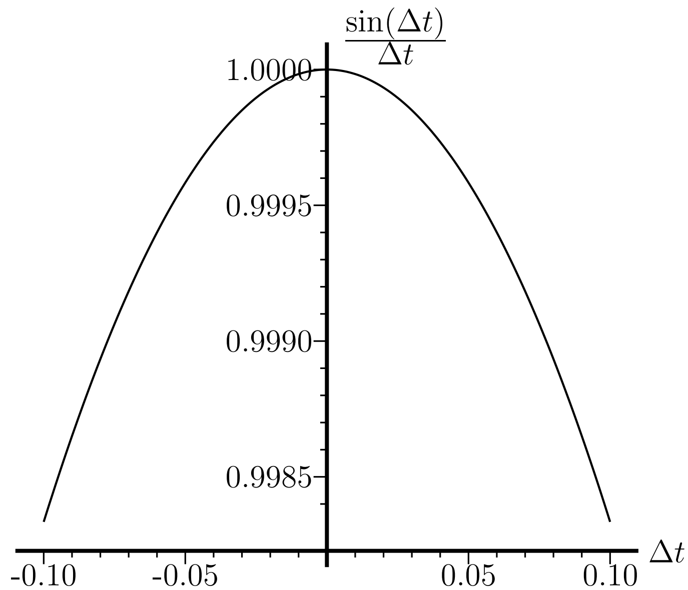
$$\bar{v}\left([t,\ t+\Delta t]\right) \ = \ \cos(t)\frac{\cos(\Delta t) - 1}{\Delta t} - \sin(t)\frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t} \ .$$

A velocidade instantânea, $v(t)$, do objecto no instante t é igual ao limite $\Delta t \to 0$ das velocidades médias. É, portanto, preciso determinar o limite das expressões $(\cos(\Delta t) - 1)/\Delta t$ e $\sin(\Delta t)/\Delta t$. Isto podemos fazer graficamente. Escolhendo uns valores em torno do valor zero para Δt, obtemos a seguinte tabela (verifique-os no sua calculadora!)

$\Delta t\ (s)$	-0,10	-0,05	-0,01	0,01	0,05	0,10
$\dfrac{\cos(\Delta t)-1}{\Delta t}$	0,050	0,025	0,005	-0,005	-0,025	-0,050
$\dfrac{\sin(\Delta t)}{\Delta t}$	0,99833	0,99958	0,99998	0,99998	0,99958	0,99833

Os gráficos seguintes mostram com mais pormenor a variação das expressões $(\cos(\Delta t)-1)/\Delta t$ e $\sin(\Delta t)/\Delta t$ para valores de Δt muito pequenos.





A partir destes gráficos é facil concluir qual o limite destas expressões quando Δt tende para zero, ou seja

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cos(\Delta t)-1}{\Delta t}=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t}=1\ .$$

Portanto,

$$v(t)\ =\ \lim_{\Delta t\to 0}\left[\cos(t)\frac{\cos(\Delta t)-1}{\Delta t}-\sin(t)\frac{\sin(\Delta t)}{\Delta t}\right]=-\sin(t)=\frac{d\cos(t)}{dt}\ .$$

$3\frac{3}{4}$. A função exp

Procura-se uma função, $x(t)$, função do tempo, t, cuja derivada em ordem do tempo, $\dot{x}(t)$, é igual a própria função, ou seja

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x(t) \quad .$$

Antes de tentar resolver este problema, vamos estudar primeiro uma das propriedades desta função. Da definição da derivada em ordem do tempo, obtemos o seguinte:

$$x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \text{para} \quad \Delta t \ll 1 \quad ,$$

ou seja

$$\{1 + \Delta t\}\, x(t) \approx x(t+\Delta t) \quad \text{para} \quad \Delta t \ll 1 \quad .$$

Esta é uma propriedade das funções do tipo

$$x_a(t) = a^t \quad ,$$

desde que

$$x_a(t+\Delta t) = a^{t+\Delta t} = \left\{a^{\Delta t}\right\} a^t = \left\{a^{\Delta t}\right\} x(t) \quad .$$

Ou seja, o valor da função x_a para $(t+\Delta t)$ é igual ao valor da função x_a para (t), multiplicado por um coeficiente que apenas depende de Δt.

Portanto, para começar consideramos as duas funçõesseguintes:

$$x_2(t) = 2^t \quad \text{e} \quad x_3(t) = 3^t \quad .$$

As derivadas em ordem do tempo, t, destas funções são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2^{t+\Delta t} - 2^t}{\Delta t} = \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \right\} \times 2^t \quad \text{e} \\ \dot{x}_3(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3^{t+\Delta t} - 3^t}{\Delta t} = \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \right\} \times 3^t \quad . \end{aligned}$$

Repare que as derivadas em ordem do tempo destas funções são proporcionais às próprias funções, ou seja:

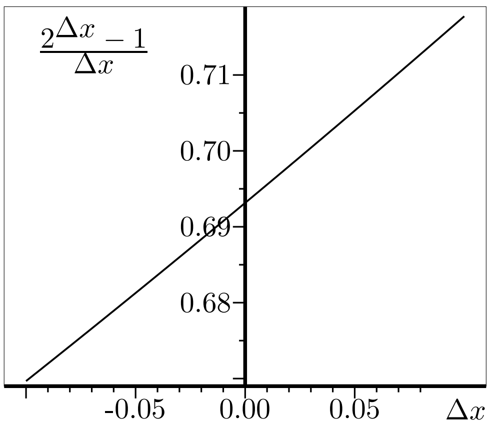
$$\dot{x}_2(t) = \text{constante} \times 2^t = \text{constante} \times x_2(t) \quad \text{e} \quad \dot{x}_3(t) = \text{constante} \times 3^t = \text{constante} \times x_3(t) \quad ,$$

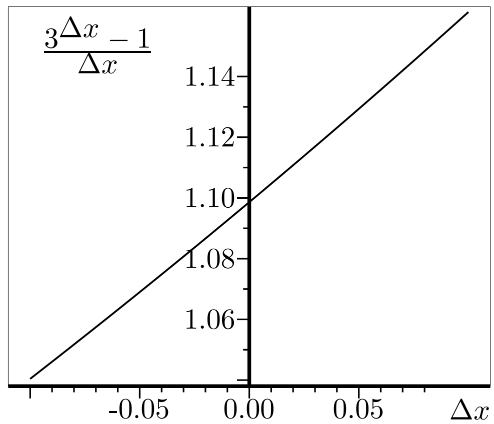
onde as constantes são dadas respectivamente por:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \quad ,$$

o que são expressões independentes do tempo t.

Os valores destas constantes podemos determinar graficamente, escolhendo uns valores de Δt próximos de $\Delta t = 0$. Obtêm-se os seguintes gráficos (com a sua calculadora pode verificar os valores das curvas)





de que podemos concluir que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{2^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = 0,69314\ldots \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3^{\Delta t} - 1}{\Delta t} = 1,09861\ldots \quad .$$

Portanto,

$$\dot{x}_2(t) = (0,69314\ldots) \times x_2(t) \quad \text{e} \quad \dot{x}_3(t) = (1,09861\ldots) \times x_3(t) \quad .$$

Consequentemente, a função que nós procuramos deve ter a forma:

$$x(t) = e^t \quad \text{com} \quad 2 < e < 3 \quad .$$

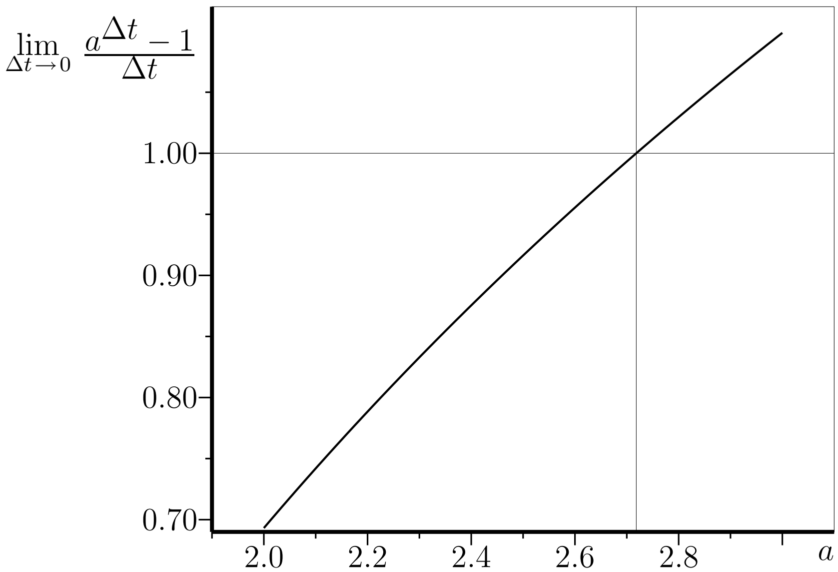
Considere, então, a função a^t e a sua derivada em ordem do tempo dada por:

$$\frac{da^t}{dt} = \left\{ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \right\} \times a^t \quad .$$

Queremos que a expressão entre parênteses seja igual a 1.

No gráfico seguinte mostra-se a dependência do valor de a da seguinte expressão:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$$



Podemos apurar que

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{a^{\Delta t}-1}{\Delta t} = 1 \quad \text{para} \quad a = 2,71828\ldots \quad .$$

Para este número utiliza-se o símbolo e. Portanto,

$$e = 2,71828\ldots \quad .$$

A função procurada é dada por e^t e a sua propriedade mais importante é

$$\frac{de^t}{dt} = e^t \quad .$$

Repare que também a função $A\times e^t$ (A constante) tem esta propriedade. Portanto, a função e^t não é a única função cuja derivada em ordem do tempo é igual a própria função.

Uma expansão em série

Caso $t = 0$, temos para a função $x(t) = e^t$

que $\quad x(0) \;=\; e^0 \;=\; 1 \quad ,$

mas também que $\quad \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0} \;=\; e^0 \;=\; 1 \quad ,$

e ainda que $\quad \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)_{t=0} \;=\; e^0 \;=\; 1 \quad$, etcetera.

Portanto, o somatório

$$e^t \;=\; a_0 \;+\; a_1 t \;+\; a_2 t^2 \;+\; a_3 t^3 \;+\; a_4 t^4 \;+\; a_5 t^5 \;+\; \ldots \quad ,$$

para a função exp, tem as condições seguintes para os coeficientes:

$$\begin{aligned}
a_0 \;&=\; e^0 \;=\; 1 \\
1 \times a_1 \;&=\; \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0} \;=\; e^0 \;=\; 1 \\
2 \times a_2 \;&=\; \left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)_{t=0} \;=\; e^0 \;=\; 1 \\
2 \cdot 3 \times a_3 \;&=\; \left(\frac{d^3x(t)}{dt^3}\right)_{t=0} \;=\; e^0 \;=\; 1 \\
&\vdots \quad .
\end{aligned}$$

Ou seja $\quad a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_3 = \frac{1}{2 \times 3} \quad , \quad \text{etc} \quad ,$

e portanto

$$e^t \;=\; 1 \;+\; t \;+\; \frac{1}{2}t^2 \;+\; \frac{1}{3!}t^3 \;+\; \frac{1}{4!}t^4 \;+\; \frac{1}{5!}t^5 \;+\; \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad .$$

Verifica-se facilmente que também é igual a própria somatório, a sua derivada em ordem do tempo.

4. $\boldsymbol{x(t) = e^t}$

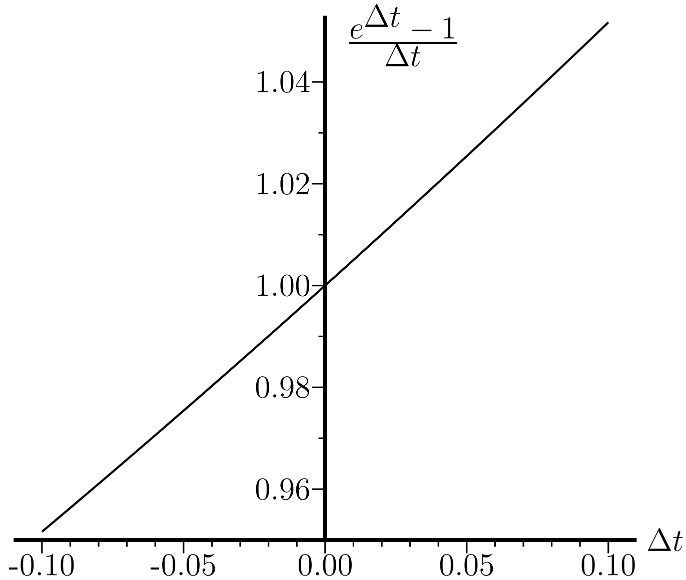
Se o movimento de um objecto em função do tempo é descrito pela função $x(t) = e^t$, então, verifica-se para a velocidade média no intervalo de tempo $[t,\ t + \Delta t]$ a seguinte expressão:

$$\bar{v}\left([t,\ t+\Delta t]\right) \ = \ \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \ = \ \frac{e^{t+\Delta t} - e^t}{\Delta t} \ = \ e^t \ \left[\frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t}\right] .$$

A velocidade instantânea, $v(t)$, do objecto no instante t é igual ao limite $\Delta t \to 0$ das velocidades médias. É, portanto, preciso determinar o limite da expressão $(\exp(\Delta t) - 1)/\Delta t$. Tal como no exemplo 3 pode-se fazer graficamente. Escolhendo uns valores em torno do valor zero para Δt, obtemos a seguinte tabela (verifique-os na sua calculadora!)

$\Delta t\ (s)$	-0,10	-0,05	-0,01	0,01	0,05	0,10
$\dfrac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$	0,9516	0,9754	0,9950	1,0050	1,0254	1,0517

O gráfico seguinte mostra com mais pormenor como a expressão $(\exp(\Delta t) - 1)/\Delta t$ varia para valores de Δt muito pequenos.



A partir deste gráfico é facil concluir qual o limite desta expressão quando Δt tende para zero, ou seja

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \ = \ 1 .$$

Portanto,

$$v(t) \ = \ \lim_{\Delta t \to 0} \ e^t \ \left[\frac{e^{\Delta t} - 1}{\Delta t}\right] = e^t = \frac{de^t}{dt} .$$

5. $\boldsymbol{x(t) = x_0 - AT\log\left(\cosh\left(\frac{t}{T}\right)\right)}$

Neste caso vai-se estudar o movimento de um corpo em queda livre num meio viscoso. Por exemplo, um objecto que é lançado verticalmente para cima, sobe até um dado altura e depois cai verticalmente. Imagine-se que além da força gravítica o corpo é actuado por uma força de resistência, devido à viscosidade do meio, a qual aumenta com o aumento da velocidade.

Para este estudo considera-se uma força de resistência proporcional ao quadrado da velocidade e com sentido oposto à mesma.

A e T representam constantes positivas e têm unidades respectivamente m/s e s.

A velocidade instantânea é dada por

$$v(t) \;=\; \frac{dx}{dt} \;=\; -A\left(\frac{\sinh\left(\frac{t}{T}\right)}{\cosh\left(\frac{t}{T}\right)}\right) \;=\; -A\tanh\left(\frac{t}{T}\right)$$

e a aceleração instantânea por

$$a(t) \;=\; \frac{d^2x}{dt^2} \;=\; -\frac{A}{T}\frac{1}{\cosh^2\left(\frac{t}{T}\right)} \;=\; -\frac{A}{T}\left\{1-\tanh^2\left(\frac{t}{T}\right)\right\} \quad .$$

Obtemos então a seguinte equação de movimento

$$\frac{d^2x}{dt^2} \;=\; -\frac{A}{T} \;+\; \frac{1}{AT}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad .$$

A aceleração tem uma parte, $-A/T$, que é constante e outra parte, v^2/AT, que varia quadraticamente com a velocidade. Ora, esta última parte deverá ter sempre sentido oposto ao da velocidade, tal como já foi dito em cima.

Repare que para $t > 0$ temos $\tanh(t/T) > 0$ e portanto, $v < 0$. Consequentemente, $v^2/AT > 0$ actua no sentido oposto ao da velocidade. Mas, para $t < 0$ temos $v > 0$, e, portanto, $v^2/AT > 0$ actua no mesmo sentido ao da velocidade.

Desta analise vê-se que função posição $x(t)$ considerada apenas serve para $t > 0$.

As várias funções usadas são definidas por

$$\cosh\left(\tfrac{t}{T}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{t/T} + e^{-t/T}\right) \;,\;\; \sinh\left(\tfrac{t}{T}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{t/T} - e^{-t/T}\right)$$

$$\text{e}\quad \tanh\left(\tfrac{t}{T}\right) = \frac{e^{t/T} - e^{-t/T}}{e^{t/T} + e^{-t/T}} \quad .$$

Para $t \ll T$ podemos tomar as seguintes aproximações

$$e^{t/T} \approx 1 + \frac{t}{T} \;,\;\; e^{-t/T} \approx 1 - \frac{t}{T}$$

$$\text{e portanto}\;\; \sinh\left(\tfrac{t}{T}\right) \approx \frac{t}{T} \;\text{e}\;\; \tanh\left(\tfrac{t}{T}\right) \approx \frac{t}{T} \quad .$$

Para a aproximação da função $\cosh\left(\frac{t}{T}\right)$ é preciso considerar uma expansão até à segunda ordem

$$e^{t/T} \approx 1 + \frac{t}{T} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2 \ , \ \ e^{-t/T} \approx 1 - \frac{t}{T} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2$$

$$\text{e portanto} \ \ \cosh\left(\frac{t}{T}\right) \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2 \quad .$$

A função $\log\left(\cosh\left(\frac{t}{T}\right)\right)$ é aproximada por

$$\log\left(\cosh\left(\frac{t}{T}\right)\right) \approx \log\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2 \quad .$$

Assim obtemos, no caso $t \ll T$, para as funções da posição, da velocidade e da aceleração as seguintes aproximações:

$$x(t) \approx x_0 - \frac{1}{2}AT\left(\frac{t}{T}\right)^2 \ , \ \ v(t) \approx -A\,\frac{t}{T} \ \ \text{e} \ \ a(t) \approx -\frac{A}{T} \quad .$$

Repare que estas funções descrevem um objecto em queda livre com aceleração $g = A/T$, ou seja, quando a sua velocidade ainda é pequena, o objecto não sofre resistência do meio viscoso.

Para $t \gg T$ podemos tomar as seguintes aproximações:

$$e^{-t/T} \approx 0 \ \ \text{e, portanto,} \ \ \sinh\left(\frac{t}{T}\right) \approx \cosh\left(\frac{t}{T}\right) \approx \frac{1}{2}e^{t/T} \ \ \text{e} \ \ \tanh\left(\frac{t}{T}\right) \approx 1 \quad .$$

Assim obtemos, no caso $t \gg T$, para as funções da posição, da velocidade e da aceleração as seguintes aproximações:

$$x(t) \approx x_0 - AT\left(\frac{t}{T}\right) = x_0 - At \ , \ \ v(t) \approx -A \ \ \text{e} \ \ a(t) \approx 0 \quad .$$

Repare que assim descreve-se um objecto com movimento uniforme, ou seja, quando a sua velocidade atinge a velocidade máxima, A, a força gravítica no objecto é anulada pela resistência do meio viscoso.

6. $\boldsymbol{x(t) = x_0 + AT\log\left(\cos\left(\frac{t}{T}\right)\right)}$

A e T representam constantes e têm unidades respectivamente m/s e s.
A velocidade instantânea é dada por:

$$v(t) \;=\; \frac{dx}{dt} \;=\; A\left(\frac{-\sin\left(\frac{t}{T}\right)}{\cos\left(\frac{t}{T}\right)}\right) \;=\; -A\tan\left(\frac{t}{T}\right)$$

e a aceleração instantânea por:

$$a(t) \;=\; \frac{d^2x}{dt^2} \;=\; -\frac{A}{T}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{t}{T}\right)} \;=\; -\frac{A}{T}\left\{1+\tan^2\left(\frac{t}{T}\right)\right\} \quad .$$

Obtemos então a seguinte equação de movimento:

$$\frac{d^2x}{dt^2} \;=\; -\frac{A}{T} \;-\; \frac{1}{AT}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad .$$

A aceleração tem um parte, $-A/T$, que é constante e outra parte, $-v^2/AT$, que varia quadraticamente com a velocidade. Exactamente o que nos procuramos. Mas, cuidade, porque queremos que a parte $-v^2/AT$ sempre actua na direcção oposta á direcção da velocidade.

Para $-\frac{1}{2}\pi T < t < 0$ temos $v > 0$, e, portanto, $-v^2/AT < 0$ actua na direcção oposta á velocidade. Mas, para $t > 0$ temos $v < 0$, e, portanto, $-v^2/AT < 0$ actua na direcção da velocidade.

A função posição $x(t)$ considerada apenas serva para $-\frac{1}{2}\pi T < t < 0$.

Para $t \ll T$ podemos tomar as seguintes aproximações

$$\log\left(\cos\left(\frac{t}{T}\right)\right) \approx \log\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2\right) \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2 \quad \text{e} \quad \tan\left(\frac{t}{T}\right) \approx \frac{t}{T} \quad .$$

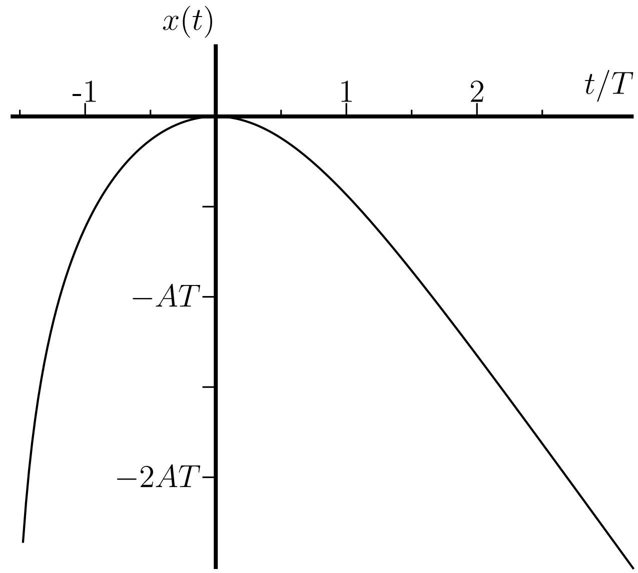
Assim obtemos, no caso $t \ll T$, para as funções da posição, da velocidade e da aceleração as seguintes aproximações

$$x(t) \approx x_0 - \frac{1}{2}AT\left(\frac{t}{T}\right)^2 \;,\;\; v(t) \approx -A\,\frac{t}{T} \quad \text{e} \quad a(t) \approx -\frac{A}{T} \quad .$$

Repare que estas funções descrevam um objecto em queda livre com aceleração $g = A/T$. Ou seja, quando sua velocidade ainda é pequena, o objecto não sofre resistência do meio viscoso.

$$\textbf{7. } x(t) = \begin{cases} x_0 + AT\log\left(\cos\left(\frac{t}{T}\right)\right) & \textbf{para} \quad -\frac{1}{2}\pi T < t < 0 \\ x_0 - AT\log\left(\cosh\left(\frac{t}{T}\right)\right) & \textbf{para} \quad t > 0 \end{cases}$$

Baseando-nos nos resultados obtidos nos exemplos 5 e 6, podemos concluir que $x(t)$ descreve o movimento de um objecto que, submerso num meio viscoso, é lançado verticalmente para cima, sobe até uma dada altura e depois cai verticalmente. A e T representam constantes positivas e têm unidades respectivamente m/s e s. A figura seguinte mostra a variação da posição do objecto em função do tempo para $x_0 = 0$.



O lançamento do objecto é realizado no instante $t = -1,5 \times T$, com uma velocidade inicial de $-A\tan(-1,5) = 14,1 \times A$. O objecto atinge a altura máxima de $x = 0$ no instante $t = 0$. Depois deste instante o objecto começa a cair. Mas, nunca mais volterá a ter a sua velocidade inicial porque a energia total do objecto não é conservada por causa da força dissipativa da resistência, devido à viscosidade do meio.

Repare que a variação da posição do objecto em função do tempo não é representada por uma curva parabólica, como é o caso para a queda livre no vácuo. A figura acima mostra que apenas próximo do instante $t = 0$ se obtém uma curva aproximadamente parabólica, devido ao facto da velocidade ser pequena e portanto, também a força dissipativa da resistência do meio viscoso. Consequentemente, a força gravítica domina o movimento do objecto quando este se encontra próximo da altura máxima.

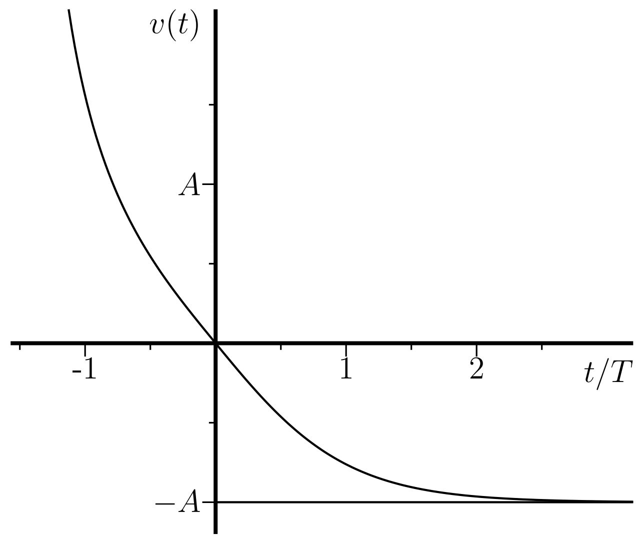
Para instantes superiores ao $t = 2 \times T$ a curva até é quase recta, o que significa que o corpo cai com uma velocidade aproximadamente constante. Neste caso a energia gravítica que o objecto perde ao perder altura é inteiramente absorvida na forma de calor pelo meio viscoso. Isto impede que a energia cinêtica do objecto possa aumentar. A velocidade limite deste exemplo é igual a $-A$.

Este último fenómeno observa-se quando chove. As gotas de água caem com uma velocidade constante que depende do seu peso. No entanto, calhaus de granizo andam às vezes ainda acelerados quando atingem a superfície da Terra.

A velocidade instantânea é dada por

$$v(t) \;=\; \begin{cases} -A\tan\left(\frac{t}{T}\right) & \text{para} \quad -\frac{1}{2}\pi T < t < 0 \\ -A\tanh\left(\frac{t}{T}\right) & \text{para} \quad t > 0 \end{cases}$$

Esta velocidade está representada na figura seguinte



8. $\boldsymbol{x(t) = x(0) \ + \ Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t)}$

Neste caso descreve-se um movimento oscilatório amortecido em torno da posição de equilíbrio $x(0)$. Por exemplo de um objecto submerso num meio viscoso e suspenso de uma mola. A frequência da oscilação é representada por ω, o coeficiente de amortecimento por α e a amplitude inicial por A. Os parâmetros α e ω têm unidades s^{-1}, enquanto A tem unidades m.

A equação do movimento pode-se facilmente obter, com o seguinte resultado

$$\frac{d^2x}{dt^2} \ = \ -\left(\omega^2+\alpha^2\right)\{x(t)-x(0)\} \ - \ 2\alpha\frac{dx}{dt} \quad .$$

A aceleração tem uma parte, $-\left(\omega^2+\alpha^2\right)\{x(t)-x(0)\}$, que é proporcional com $[x(t)-x(0)]$ e que tem sempre sentido oposto ao da distância instantânia entre o objecto e a posição de equilíbrio. A outra parte da aceleração $-2\alpha\frac{dx}{dt}$, que varia linearmente com a velocidade e que tem sempre sentido oposto ao da velocidade, descreve a força dissipativa da resistência devido à viscosidade do meio.

No entanto observa-se algo estranho na equação do movimento. Parece que a força dissipativa da resistência actua também na primeira parte da aceleração que é proporcional com a distância instantânia entre o objecto e a posição de equilíbrio.

A equação do movimento correcta é dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} \ = \ -\omega_0^2 \ \{x(t)-x(0)\} \ - \ 2\alpha\frac{dx}{dt} \quad ,$$

onde ω_0 descreve a frequência da oscilação própria do objecto na ausência de forças dissipativas.

Neste caso o movimento do objecto é descrito por

$$x(t) = x(0) \ + \ Ae^{-\alpha t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\ t\right) \quad .$$

Assim está bem: a frequência da oscilação diminua relativamente à das oscilações livres, por causa da força dissipativa da resistência devido à viscosidade do meio.

Um caso particular acontece quando $\omega_0 = \alpha$. Obtem-se

$$x(t) = x(0) \ + \ Ae^{-\alpha t} \quad .$$

O objecto nunca chega a oscilar, mas aproxima-se lentamente da posição de equilíbrio.

Outras casos particulares acontecem quando $0 < \omega_0 < \alpha$. Obtem-se

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \ + \ Ae^{-\alpha t}\cos\left(i\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\ t\right) \\ &= x(0) \ + \ Ae^{-\alpha t}\cosh\left(\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\ t\right) \\ &= x(0) \ + \ \frac{A}{2}\left[e^{-\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t} \ + \ e^{-\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t}\right] \quad . \end{aligned}$$

O objecto também nunca chega a oscilar, mas aproxima-se lentamente da posição de equilíbrio.

Uma solução geral da equação do movimento correcta no caso $0 < \omega_0 < \alpha$ é dada por

$$x(t) \;=\; x(0) \;+\; A_1 e^{-\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t} \;+\; A_2 e^{-\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t} \quad ,$$

e a velocidade por

$$\begin{aligned} v(t) \;&=\; \frac{dx}{dt} \\ &=\; -\left[\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right) A_1 e^{-\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t} \;+\; \left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right) A_2 e^{-\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right)t}\right] \quad . \end{aligned}$$

A posição inicial e velocidade inicial ($t = 0$) são dadas por

$$\begin{aligned} x(t=0) \;&=\; x(0) \;+\; A_1 \;+\; A_2 \quad , \\ v(t=0) \;&=\; -\left[\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right) A_1 \;+\; \left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\right) A_2\right] \\ &=\; -\left(A_1 \;+\; A_2\right)\alpha \;-\; \left(A_1 \;-\; A_2\right)\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \quad . \end{aligned}$$

Por exemplo: Se no instante $t = 0$ o objecto está parado a uma distância 2ℓ da posição de equilíbrio, então

$$A_1 \;=\; \ell\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}}\right) \quad \text{e} \quad A_2 \;=\; \ell\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}}\right) \quad .$$