VIBRAÇÕES e ONDAS

Lista dos assuntos para o exame 2001/2002

I. Os seguintes capítulos do livro **Introdução à Física** dos autores Jorge Dias de Deus, Mário Pimenta, Ana Noronha, Teresa Peña e Pedro Brogueira:

1. Espaço e tempo, escalas e medições

1.5	Medir intervalos de tempo
1.6	Os limites da medição
1.7	Os erros da medição

2. As ondas: transmissão de informação

2.1	As ondas: ver e ouvir
2.2	Como descrever uma onda?
2.3	Equação das ondas
2.3.1	Ondas sonores num tubo de ar
2.3.2	Corda vibrante
2.4	Algumas características gerais das ondas
2.4.1	Ondas transversais e longitudinais
2.4.2	Polarização
2.4.3	Efeito Doppler
2.4.4	Ondas progressivas e ondas estacionárias; Sobreposição das ondas
2.45.	Dispersão
2.5	Princípio de Huygens
2.5.1	Reflexão
2.5.2	Refracção
2.5.3	Interferências
2.5.4	Difracção
2.5.5	Raios X e estudo das moléculas
2.6	Lentes e a formação de imagens

3. Das simetrias no espaço-tempo à Mecânica

3.1	Simetrias e invariâncias
3.2	O princípio variacional de Hamilton e a Mecânica
	O princípio de Fermat e a lei de Snell-Descartes
3.4	Graus de liberdade e coordenadas generalizadas
3.9	Estabilidade de sistemas e movimentos oscilatórios
3.9.1	Estabilidade
3.9.2	O oscilador harmónico
3.9.3	O oscilador com atrito (amortecido)
3.10	O oscilador forçado (ressonância; meio elástico)

4. A relatividade de Galileu a Einstein

4.4	A transformação de Lorentz numa dimensão espacial
4.4.1	Transformação de Lorentz para as coordenadas
4.4.2	Transformação de Lorentz para as velocidades
4.4.3	O efeito de Doppler relativista

5. Partículas e campos, campo electromagnético

5.6	Circuitos eléctricos
5.6.1	Elementos de um circuito eléctrico
5.6.2	A resolução de circuitos eléctricos (RC, RL, RLC)
5.7	As leis do campo electromagnético
5.7.1	Descrição local do campo electromagnético
5.7.2	A corrente de deslocamento
5.7.3	As equações de Maxwell
5.8	Ondas electromagnéticas
5.8.1	Equações das ondas electromagnéticas
5.8.2	Energia de uma onda electromagnética
5.8.3	Produção de ondas electromagnéticas
5.8.4	Polarização ondas electromagnéticas

7. Introdução à Mecânica Quântica

7.4	Equação de Schrödinger
7.4.4	Partícula no potencial do oscilador harmónico
7.6	A estrutura da matéria
7.6.4	Rotações e vibrações nas moléculas

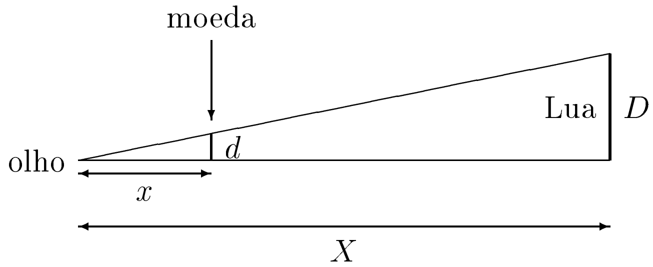
II. Os problemas correspondentes.

Soluções de alguns problemas dos primeiros três capítulos do livro da cadeira Vibrações e Ondas (2001/2002)
Introdução à Fisíca
dos autores Jorge Dias de Deus, Mário Pimenta, Ana Noronha, Teresa Peña e Pedro Brogueira.

1 Os problemas do capítulo 1

1.1 Um ano-luz = (velocidade da luz) $\times$ (o tempo de um ano).
velocidade da luz $= c \approx 3,00 \times 10^8\ ms^{-1}$
1 ano $\approx$ 365,24 dias $= 365,24 \times 24 \times 3600$ segundos $\approx 3,156 \times 10^7\ s$.
Então, 1 ano-luz $\approx 3,00 \times 10^8 \times 3,156 \times 10^7 = 0,947 \times 10^{16}\ m$.
distância Terra-Proxima Centauri $= \dfrac{4,047 \times 10^{16}\ m}{0,947 \times 10^{16}\ m}$ ano-luz $\approx 4,27$ ano-luz.

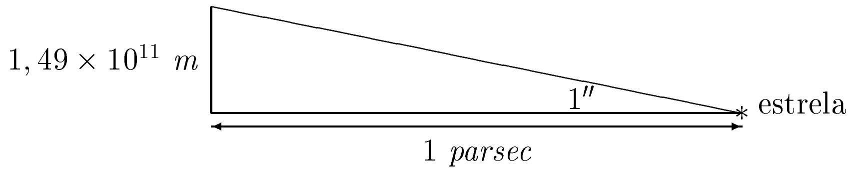
1.2



$D =$ diametro Lua $= 3,476 \times 10^6\ m$
$X =$ distância Lua-Terra (Lua-olho) $= 4 \times 10^8\ m$
$d =$ diametro moeda (de 100 escudos) $= 2,5 \times 10^{-2}\ m$
$x =$ distância moeda-olho.

$\dfrac{x}{d} = \dfrac{X}{D}$, portanto $x = X\dfrac{d}{D} = 4 \times 10^8\ m \times \dfrac{2,5 \times 10^{-2}\ m}{3,476 \times 10^6\ m} = 2,88\ m$

1.3



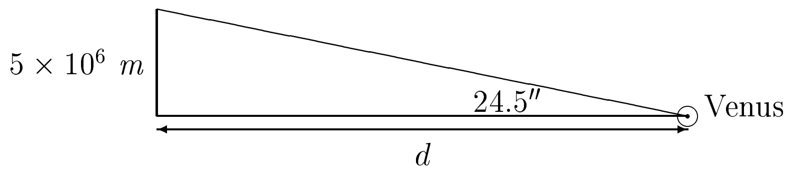
$$\frac{1,49 \times 10^{11}\ m}{1\ parsec} = \mathrm{tg}\,(1'') = \mathrm{tg}\,(4,85 \times 10^{-6}\ rad) = 4,85 \times 10^{-6}$$

a) $1\ pc = 1\ parsec = \dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{\mathrm{tg}\,(1'')} = \dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{4,85 \times 10^{-6}} = 0,31 \times 10^{17}\ m.$

b) 1 *parsec* $= \dfrac{0,31 \times 10^{17}\ m}{0,947 \times 10^{16}\ m}$ ano-luz $\approx 3,3$ ano-luz.

c) $d_{\max} = \dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{\mathrm{tg}\,(0,02'')} \approx \dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{0,02\mathrm{tg}\,(1'')} = 50 \times \dfrac{1,49 \times 10^{11}\ m}{\mathrm{tg}\,(1'')} = 50\ pc.$

1.4



$d =$ distância Terra-Venus no ponto de maior aproximação.

$\dfrac{5 \times 10^6\ m}{d} = \mathrm{tg}\,(24,5'') \approx 24,5 \times \mathrm{tg}\,(1'') = 1,19 \times 10^{-4},$

então: $d = \dfrac{5 \times 10^6\ m}{1,19 \times 10^{-4}} = 4,2 \times 10^{10}\ m.$

1.5 Do resultado obtido no problema 1.4 deduz-se: $ct = 4,2 \times 10^{10}\ m,$

então: $t = \dfrac{4,2 \times 10^{10}\ m}{3,00 \times 10^8\ ms^{-1}} = 1,4 \times 10^2\ s.$

1.6 Defina-se: $d = ct$, a distância Terra-Lua; $\Delta t = 10^{-9}\ s$, o mais pequeno intervalo de tempo que se consegue medir; $\Delta d =$, o erro na determinação da distância Terra-Lua. Logo

$d \pm \Delta d = c(t \pm \Delta t)$ e $\Delta d = c\Delta t = (3,00 \times 10^8\ ms^{-1}) \times (10^{-9}\ s) = 0,3\ m.$

1.7 $h =$ profundidade da superfície da água no poço, $t_q =$ tempo de queda da pedra e $t_s =$ tempo da demora do som. Tomando a velocidade do som infinito, em que caso $t_q = 3\ s$, obtemos

$h = \frac{1}{2} g t_q^2 = \frac{1}{2}\,(9,8\ ms^{-2}) \times (3\ s)^2 = 44,1\ m.$

No entanto, dado que a velocidade do som não é infinita, mas $v =$344 ms^{-1}, temos

$3\ s = t_q + t_s = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + \dfrac{h}{v},$

o que nos leva à equação quadrática $x^2 + xv\sqrt{\dfrac{2}{g}} - 3v = 0$, com $x = \sqrt{h}$. Esta equação é resolvida por

$x = \frac{1}{2}\left(-v\sqrt{\dfrac{2}{g}} + \sqrt{\dfrac{2v^2}{g} + 12v}\right).$

Substituindo os valores para v e g obtem-se $h = 40,7\ m$. Uma diferença de 3,4 m com o valor obtido sem contar com a velocidade finita do som.

1.8 Distância $= vt = (344\ ms^{-1}) \times (10\ s) = 3,4 \times 10^3\ m.$
Sobre uma distância da ordem de 3 km a luz demora um intervalo de tempo da ordem de $10^{-5}\ s$.

Então o erro cometido na determinação do tempo da demora do som é 10^{-5} s em 10 s, ou seja um fracção de 10^{-6}. A distância é proporcional com o tempo, logo sofre tambêm um erro desta ordem da grandeza, ou seja 3 mm em 3 km.

1.12 Desintegração radioactiva: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$. $N(t)$ representa o número de átomos ainda nao desintegrados no instante t, λ a constante de decaimento. O número de átomos ainda nao desintegrados no instante $t = 0$ é dado por $N(t = 0) = N_0 e^0 = N_0$.
O período de semitransformação, $T_{1/2}$, defina-se pelo tempo que demora até a metada dos átomos iniciais, N_0, se desintegrar, então $N\left(t = T_{1/2}\right) = \frac{1}{2}N_0$.

a) $\frac{1}{2}N_0 = N\left(T_{1/2}\right) = N_0 \exp\left(-\lambda T_{1/2}\right)$, ou seja $-\log(2) = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T_{1/2}$.
Logo $\lambda = \dfrac{\log(2)}{T_{1/2}} = \dfrac{\log(2)}{5,730 \times 10^3 \text{ anos}} = \dfrac{\log(2)}{1,808 \times 10^{11} \text{ s}} = 3,83 \times 10^{-12} \text{ s}^{-1}$.

b) A intensidade da radiação (o número de desintegrações por unidade de tempo) é proporcional com o número de átomos ainda disponível a desintegrar-se, $N(t)$.
Então, $10,8\ des/g/s = 13,5 \times e^{-\lambda t}\ des/g/s$.
Logo $\lambda t = \log\left(\dfrac{13,5}{10,8}\right)$, ou seja $t = \dfrac{T_{1/2}}{\log(2)} \times \log\left(\dfrac{13,5}{10,8}\right) = 1845\ anos$.

c) $T_{1/2} = 5730 \pm 30$ $anos$ e o valor da datação obtido em (b) é proporcional com $T_{1/2}$. Logo $\dfrac{\Delta T_{1/2}}{T_{1/2}} = \dfrac{\Delta t}{t}$. Agora, 30 é 0,52 porcento de 5730, então o erro em t tambêm é deste tamanho, ou seja 0,52 porcento de 1845. Portanto, $\Delta t = 9,7$ $anos$.

2 Os problemas do capítulo 2

2.1 a) A frequência, f, da oscilação é igual a $f = 10\ min^{-1} = 10\ (60\ seg)^{-1} = 0,167\ Hz$. O comprimento de onda, λ, lê-se da figura: $\lambda = 30$ m. A velocidade de propagação da onda, v, é dada por $v = f\lambda = 5\ ms^{-1}$. A amplitude, A, também se lê na figura: A altura de uma crista de onda relativamente a um vale é 4 m. Portanto para amplitude de onda temos $A = 2$ m.

b) O comprimento de onda, λ, lê-se da figura: $\lambda = 0,78$ m. A velocidade de propagação da onda, v, é dada no texto, $v = 344\ ms^{-1}$. Portanto para a frequência temos $f = \frac{v}{\lambda} = 441\ Hz$. Do texto do problema podemos também deduzir a amplitude de onda: A diferença de pressão entre uma região de compressão e uma região de descompressão do ar é igual a 28 Pa. Portanto para amplitude de onda temos $A = 14$ Pa.

c) A onda do mar (exercício a) é progressiva e transversal (as oscilações são perpendiculares à direcção de propagação da onda). A perturbação, $\phi(x,t)$, em função da coordenada, x, da posição de equilíbrio de um ponto da superfície do mar e em função do tempo, t, descreve-se matematicamente por $\phi(x,t) = A\cos\left[\frac{\omega}{v}(x - vt) + \alpha\right]$, onde ω, a frequência angular, está relacionada com f por $\omega = 2\pi f$ e onde α representa uma fase qualquer. Substituindo os valores do exercício (a), obtemos $\phi(x,t) = 2\cos\left[0,21 \times (x - 5t) + \alpha\right]$ (m).

A onda sonóra no interior do tubo de órgão (exercício b) é estacionária e longitudinal (as oscilações são paralelas à direcção de propagação da onda). A onda estacionária podemos considerar que é composta por duas ondas, uma com velocidade da onda v e outra com velocidade $-v$. A perturbação, $\phi(x,t)$, em função da coordenada, x, da posição de equilíbrio de uma molecula do ar e em função do tempo, t, descreve-se matematicamente por $\phi(x,t) = \frac{A}{2}\cos\left[\frac{\omega}{v}(x-vt)+\alpha\right] + \frac{A}{2}\cos\left[\frac{\omega}{v}(x+vt)+\beta\right] = A\cos\left[\frac{\omega}{v}x+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right] \times \cos\left[\omega t - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$, onde ω, a frequência angular, está relacionada com f por $\omega = 2\pi f$ e onde α e β representam fases quaisquer (no entanto relacionadas pela configuração do tubo de órgão). Substituindo os valores do exercício (b), obtemos $\phi(x,t) = 14\cos\left[8x+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]\cos\left[2771t-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$ (Pa). Repare que as amplitudes das oscilações das moleculas são diferentes dependente da posição do equilíbrio, x, das moleculas, *i.e.* $Amplitude = 14\cos\left[8x+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]$ (Pa). De facto esta fórmula refere-se às oscilações da pressão, mas estas estão relacionadas com as oscilações das moleculas. O movimento oscilatório é descrito pela segunda parte da fórmula, *i.e.* $\cos\left[2771t-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right]$, onde se lê que todas as moleculas do tubo oscilam em fase no mesmo sentido, ou no sentido oposto (depende do sinal da *Amplitude*).

d) $1\ atm \approx 10^5\ Pa$, portanto $28\ Pa \approx 0,28 \times 10^{-3}\ atm$.

2.2 Considere o vector $\vec{\phi}(x,t)$ que descreve a posição no instante t de um pedaço da corda que no equilíbrio se encontra na posição indicada por x. Este vector está sempre perpendicular à corda apontando da posição x para fora (na direcção do vertical no caso em consideração), mas varia de modulo e de sentido em função do tempo.
O vector $\vec{\phi}$ deixa-se decompor em dois componentes, um perpendicular á ranhura e um paralelo á ranhura. A componente perpendicular não pode passar para o outro lado da ranhura. Portanto, passa apenas a componente paralela. Se θ é o ângulo entre a ranhura e o vector $\vec{\phi}$ e ainda a perturbação na corda descrita por $\vec{\phi}(x,t) = A\cos\left[\frac{\omega}{v}(x-vt)+\alpha\right]\vec{e}_z$, então depois de passar da ranhura descreve-se a onda por $\vec{\phi}(x,t) = A\cos(\theta)\cos\left[\frac{\omega}{v}(x-vt)+\alpha\right]\vec{e}_r$, onde $\vec{e}_r$ representa o vector unidade paralelo á ranhura.
Além da direcção da oscilação, também a amplitude é diferente: $A_r = A\cos(\theta)$ representa a amplitude depois da onda passar na ranhura. Repare que a frequência, o comprimento de onda e a sua velocidade ficam iguais depois da passagem.

a) $\theta = 0$, então $A_r = A$.

b) $\theta = \frac{\pi}{4}$, então $A_r = A/\sqrt{2}$.

c) $\theta = \frac{\pi}{2}$, então $A_r = 0$.

d) A intensidade do sinal é proporcional com o quadrado da amplitude, portanto é diferente depois da passagem.

e) Ondas longitudinais têm oscilações na direcção da “corda” (não há componentes perpendiculares á ranhura) e passam então na ranhura sem problemas.

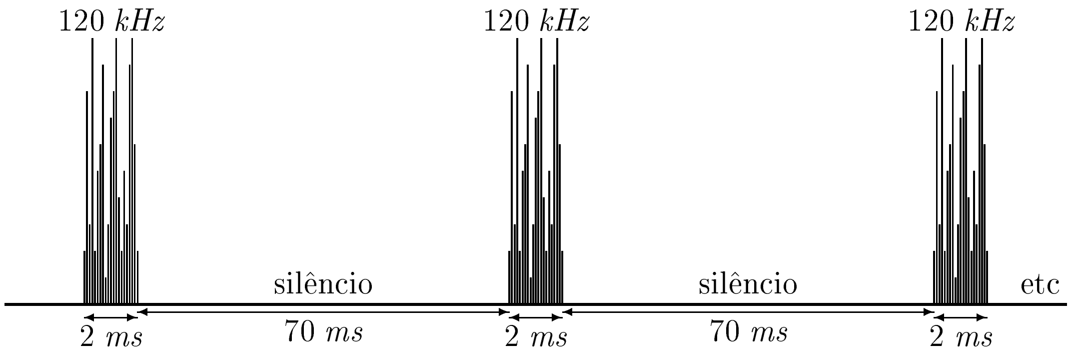
2.3 $f = \frac{c}{\lambda}$ e $c = 3,0 \times 10^8\ ms^{-1}$.

$\lambda\ (m)$	$f\ (Hz)$
$4,0 \times 10^{-7}$	$0,75 \times 10^{15}$
$7,5 \times 10^{-7}$	$0,40 \times 10^{15}$

2.4 $\lambda = \frac{v}{f}$ e $v = 344\ ms^{-1}$.

$f\ (Hz)$	$\lambda\ (m)$
20	17
20×10^3	$0,017$

2.5



a) O período do sinal global é igual a 72 ms. Então a frequêcia do sinal global é igual a $f = \frac{1}{T} = 13,9\ Hz$. A velocidade do som é igual a $v = 344\ ms^{-1}$. Então o comprimento de onda do sinal global é igual a $\lambda = \frac{v}{f} = vT = 24,8\ m$.

b) O tempo entre emissão e recepção tem que ser menos que 70 ms. Portanto, $2 \times \ell < v \times (70 \times 10^{-3}\ s) = 24\ m$. A distância máxima a que o morcego se pode afastar de um objecto, de forma a que a recepção do impulso sonoro reflectido pelo objecto não seja misturado com o som emitido no impulso seguinte, é igual a $\ell_{\text{max}} = 12\ m$.

c) $\lambda(120\ kHz) = \dfrac{344\ ms^{-1}}{120 \times 10^3\ s^{-1}} = 2,9 \times 10^{-3}\ m$. Então, com 120 kHz o morcego não pode detectar insectos de comprimentos inferiores a $2,9\ mm$.

2.7 A equação de ondas para uma corda é dada por $\dfrac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\mu}{T}\dfrac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}$, onde μ representa a massa por unidade de comprimento da corda e T a tensão na corda. Com $\phi(x,t) = A\cos\left[\frac{\omega}{v}(x - vt)\right]$, onde ω representa a frequência angular e v a velocidade de propagação da onda, obtem-se da equação de ondas a relação $-\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = -\frac{\mu}{T}\omega^2$, resolvida por $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

a) $v = \sqrt{\dfrac{1090\ N}{0,07\ kgm^{-1}}} = 125\ ms^{-1}$.

b) Para a frequência fundamental uma corda tem dois nodos, um a cada extremo. Este caso corresponde a $\ell = \frac{1}{2}\lambda$, onde ℓ representa o comprimento da corda. Logo $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2\ell} = 26,4\ Hz$.

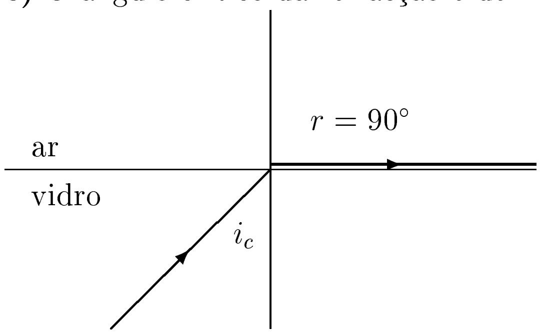
c) A corda transmite às moleculas do ar oscilações com o mesmo ritmo da vibração da corda. Portanto, o som no ar tem uma frequêcia de $f_{\text{ar}} = 26,4\ Hz$. O comprimento de onda do som no ar é dado por $\lambda_{\text{ar}} = \frac{v_{\text{som}}}{f_{\text{ar}}} = 13,0\ m$.

2.8 Do exercício 2.7 temos a relação entre a velocidade, v, da onda na corda, a tensão, T, na corda e a massa, μ, por unidade de comprimento da corda, *i.e.* $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$. Para a frequência fundamental temos, também do exercício 2.7, $\ell = \frac{1}{2}\lambda$, onde ℓ representa o comprimento da corda. Logo, $\mu = \frac{T}{v^2} = \frac{T}{(f\lambda)^2} = \frac{T}{(2f\ell)^2}$. Portanto, $\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1/(f_1\ell_1)^2}{1/(f_2\ell_2)^2} = \left(\frac{(32,8\ Hz) \times (1,98\ m)}{(4186\ Hz) \times (0.051\ m)}\right)^2 = 0,09$.

2.14 A velocidade da luz no ar é aproximadamente igual à velocidade da luz no vácuo, $c = 3,0 \times 10^8\ ms^{-1}$. Para determinar a velocidade da luz no vidro temos a relação $v = \frac{c}{n}$. Como $n = 1,5$, resulta $v_{\text{vidro}} = 2,0 \times 10^8\ ms^{-1}$.

a) Para os comprimentos de onda da luz verde no ar, λ_{ar}, e no vidro, λ_{vidro}, temos a seguinte relação $\frac{\lambda_{\text{ar}}}{\lambda_{\text{vidro}}} = \frac{v_{\text{ar}}/f_{\text{ar}}}{v_{\text{vidro}}/f_{\text{vidro}}}$. As oscilações ocorrem com os mesmos ritmos tanto no ar como no vidro. Portanto, $f_{\text{ar}} = f_{\text{vidro}}$ e daí $\frac{\lambda_{\text{ar}}}{\lambda_{\text{vidro}}} = \frac{v_{\text{ar}}}{v_{\text{vidro}}} = 1,5$ e então $\lambda_{\text{ar}} = 1,5 \times 333\ nm = 500\ nm$.

c) O ângulo crítico da refracção é definido na figura a seguir:



$\frac{\sin(i_c)}{\sin(r = 90°)} = \frac{v_{\text{vidro}}}{v_{\text{ar}}} = \frac{1}{1,5}$ e então $i_c = 41,8°$.

2.17 O ângulo de incedência é igual a $10°$ e o ângulo de refracção é aproximadamente $6°$. Ambos estes ângulos são pequenos. Portanto, para a diferença entre os dois ângulos de refracção, r_1 e r_2, que são quase iguais, podemos escrever

$$r_1 - r_2 \approx \sin(r_1 - r_2) = \sin(r_1)\cos(r_2) - \sin(r_2)\cos(r_1) \approx \sin(r_1) - \sin(r_2) = \sin(i) \times \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}\right)$$
$$= \sin(i) \times \left(\frac{n_1 - n_2}{n^2}\right) = \sin(10°) \times \frac{0,0097}{1,59^2} = 6,663 \times 10^{-4}.$$

2.18 $d\sin(\theta) = \lambda$

a) $\sin(\theta) = 0,01$ e $\lambda = 0,589 \times 10^{-6}\ m$. Portanto, $d = 100 \times \lambda = 58,9\ \mu m$.

b) $d = 58,9\ \mu m$ e $\lambda = 0,650 \times 10^{-6}\ m$. Portanto, $\sin(\theta) = 0,011$.

2.19 $\frac{1}{d} = \frac{6000}{1,0 \times 10^{-2}\ m} = 6,0 \times 10^{-2}\ m^{-1}$ e $\lambda = 0,500 \times 10^{-6}\ m$. Portanto, $\sin(\theta) = \frac{m\lambda}{d} = m \times (0,500 \times 10^{-6}\ m) \times (6,0 \times 10^{-2}\ m^{-1}) = 0,3 \times m$.

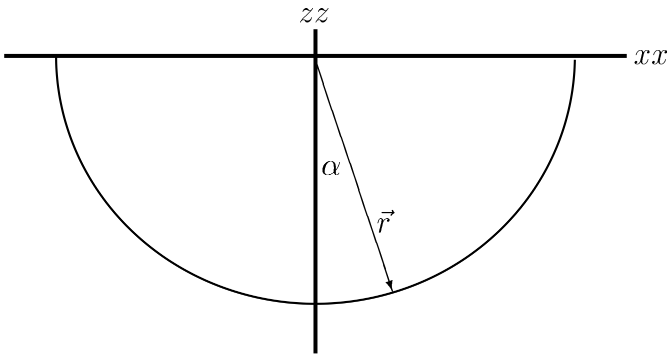
m	$\sin(\theta)$	θ
1	$0,3$	$17,5°$
2	$0,6$	$36,9°$
3	$0,9$	$64,2°$
4	> 1	não possível

2.21 $\frac{1}{d} = \frac{4000}{1,0 \times 10^{-2}\ m} = 4,0 \times 10^{5}\ m^{-1}$, $\sin(\theta) = m\frac{\lambda}{d} = m \times (4,0 \times 10^{5}\ m^{-1}) \times \lambda$.

m	θ (400 nm)	θ (700 nm)
1	$9,2°$	$16,2°$
2	$18,7°$	$34,1°$
3	$28,7°$	$57,1°$

2.22 O *poder de resolução* da rede é a medida da capacidade de separação de duas cores e é dado pelo critério de Rayleigh: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{Nm}$, onde λ e $\lambda + \Delta\lambda$ representam os comprimentos de onda das duas cores, N o número de fendas e m a ordem do máximo.
$\Delta\lambda = 0,59\ nm$ e $\lambda = 589\ nm$, portanto $Nm = 1000$. Para o primeiro máximo ($m = 1$) são precisas 1000 fendas, para o segundo ($m = 2$) apenas 500.

3 Os problemas do capítulo 3



3.32

Na figura mostra-se a nossa escolha do sistema das coordenadas e a origem relativamente á superfície do copo. O vector posição do objecto é indicado por $\vec{r}$ e o ângulo deste vector com a parte negativa do eixo dos zz por α. Se o raio da curvatura da superfície esférica é representado por R, temos

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin(\alpha(t)) \\ -R\cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \text{ e } \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\dot{\alpha}(t)\cos(\alpha(t)) \\ R\dot{\alpha}(t)\sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}.$$

A energia cinética do objecto é dada por $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2$ e a sua energia potencial gravítica por $U = mgz = -mgR\cos(\alpha)$.

a) Se o objecto foi largado sem velocidade inicial ($i.e.$ $\dot{\vec{r}}(0) = 0$) no bordo do copo ($i.e.$ $z = 0$), então a sua energia total, $E = T + U$, é zero. No fundo do copo ($i.e.$ $\alpha = 0$ e $z = -R$) a energia potencial gravítica é igual a $U = -mgR$ e é mínima. Pela conservação da energia total temos portanto que a energia cinética do objecto, quando passa pelo ponto mais fundo do copo, é igual a $T = mgR$ e é máxima. Consequentemente, obtem-se nesta situação $\frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2 = T = mgR$, ou seja $\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2g}{R}}$. Substituindo $g = 9,8\ ms^{-2}$ e $R = 0,03\ m$, encontramos $\dot{\alpha} = 25,6\ rad/s$ e a partir daí a velocidade linear $v = R\dot{\alpha} = 0,77\ m/s$.

b) A função de Lagrange é dada por $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}mR^2\dot{\alpha}^2 + mgR\cos(\alpha)$. A equação do movimento que surge deste Lagrangeano é a seguinte: $mR^2\ddot{\alpha} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha} = -mgR\sin(\alpha)$.
Para pequenas oscilações junto do fundo do copo temos $|\alpha| \ll 1$ e portanto podemos aproximar $\sin(\alpha)$ a α. Fica a equação diferencial $R\ddot{\alpha} = -g\alpha$. Uma equação destas é resolvida por $\alpha(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, onde A representa a amplitude da oscilação que necessariamente é pequena, ω a frequência angular da oscilação e ϕ uma fase inicial qualquer.
Da equação diferencial temos $-R\omega^2 = -g$. O período da oscilação é dada por $\dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}} = 0,35$ s.

c) Para pequenas oscilações de uma mola horizontal (eixo dos xx) sem fricções temos a seguinte função de Lagrange: $\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$.
A equação do movimento que surge deste Lagrangeano é a seguinte: $m\ddot{x} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -Kx$.
Uma equação destas é resolvida por $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, onde A representa a amplitude da oscilação que necessariamente é pequena, ω a frequência angular da oscilação e ϕ uma fase inicial qualquer.

Da equação diferencial temos $-m\omega^2 = -K$. O período da oscilação é dada por $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0,35$ s. Daí tira-se o valor de K.

d) O período da oscilação é dada por $\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. Portanto, R inferior implica periodo inferior e consequentemente uma frequência angular superior.